Morphologie mathématique

Ensembles et Images

Luc Brun (d'après le cours de M. Coster)

Plan

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
  - Egalité et inclusion
  - Intersection, réunion, complémentation
  - Différence et différence symétrique
- Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- Autres propriétés algébriques des opérateurs
  - Définitions
  - Comportement des opérateurs pour la croissance
- Algèbre de Minkowski
  - Translation d'un ensemble
  - Addition de Minkowski
  - Soustraction de Minkowski

Plan

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
- Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- Autres propriétés algébriques des opérateurs
  - Définitions
  - Comportement des opérateurs pour la croissance
- Algèbre de Minkowski
  - Translation d'un ensemble
  - Addition de Minkowski
  - Soustraction de Minkowski
- Les ensembles convexes
  - Définition
  - Propriétés de l'union et l'intersection d'ensembles convexes
  - Enveloppe convexe

opérateurs de base : Égalité et inclusions

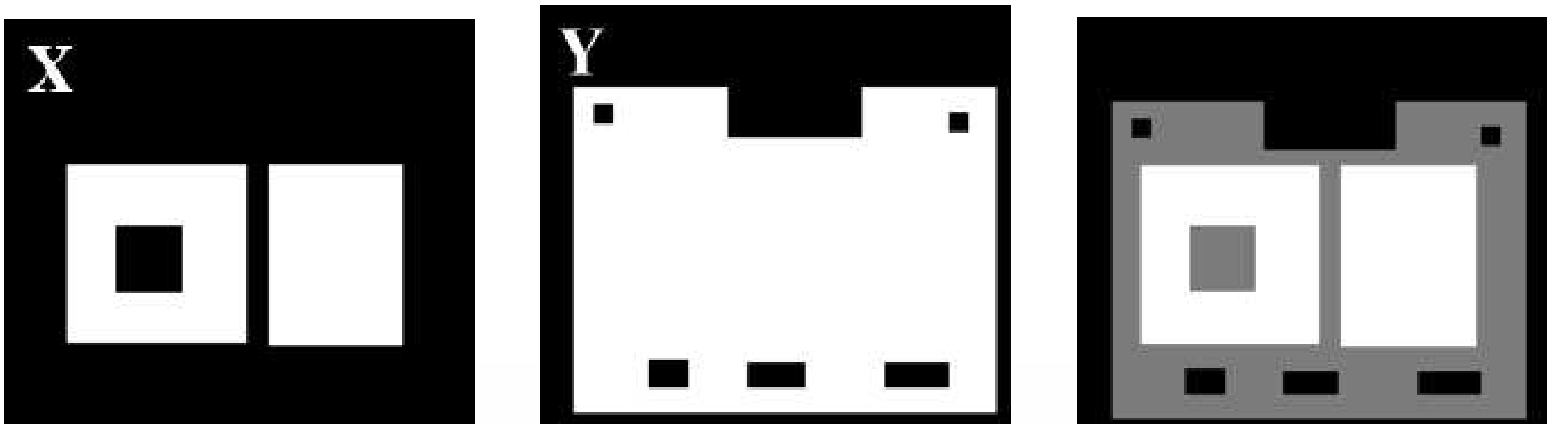
- Inclusions :
  X est un sous-ensemble de Y ou est inclus dans Y, si tous les éléments de l'ensemble X sont des éléments de l'ensemble Y

$$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X, x \in Y$$

- Égalité :
  Deux ensembles sont égaux si ils sont composé des même éléments.

$$X = Y \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \in Y) \text{ et } (\forall y \in Y, y \in X)$$

I



Inclusions

Propriétés usuelles de l'inclusion

- L'inclusion est réflexive :

$$X \subset X$$

- L'inclusion est transitive :

$$(X \subset Y \text{ et } Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$$

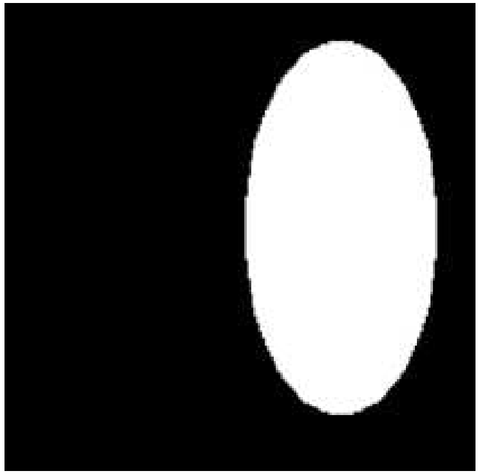
- L'inclusion est antisymétrique

$$(X \subset Y \text{ et } Y \subset X) \Rightarrow X = Y$$

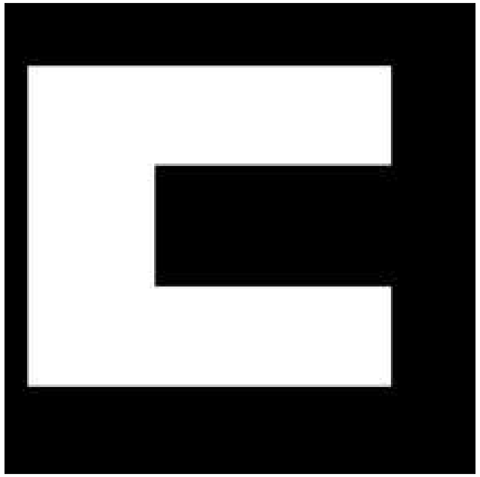
Intersection

Intersection de deux ensembles :
On appelle intersection des deux ensembles X et Y, l'ensemble noté $X \cap Y$ des éléments qui appartiennent à la fois à X et Y.

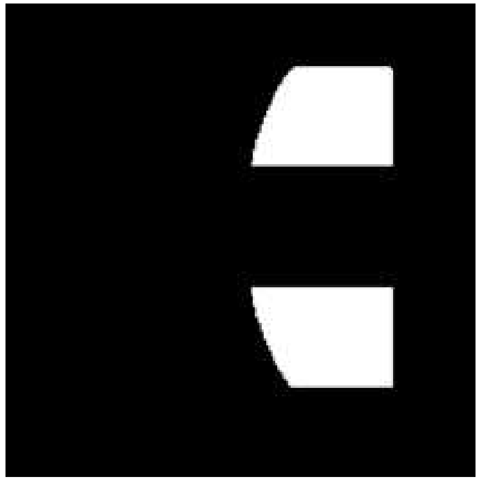
$$X \cap Y = \{x; x \in X \text{ et } x \in Y\}$$



Ensemble X



Ensemble Y



$X \cap Y$

Propriétés de l'intersection

- L'intersection est commutative : $X \cap Y = Y \cap X$
- L'intersection est associative : $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
- Autres propriétés :
  - Intersection avec l'ensemble vide : $X \cap \emptyset = \emptyset$
  - $X \cap Y \subset X$ et $X \cap Y \subset Y$
  - $X \subset Y \Rightarrow (X \cap Y) = X$
- Ensembles disjoints et ensembles qui se rencontrent
  - Ensembles disjoints :

$$X \neq \emptyset \text{ et } Y \neq \emptyset; X \cap Y = \emptyset$$

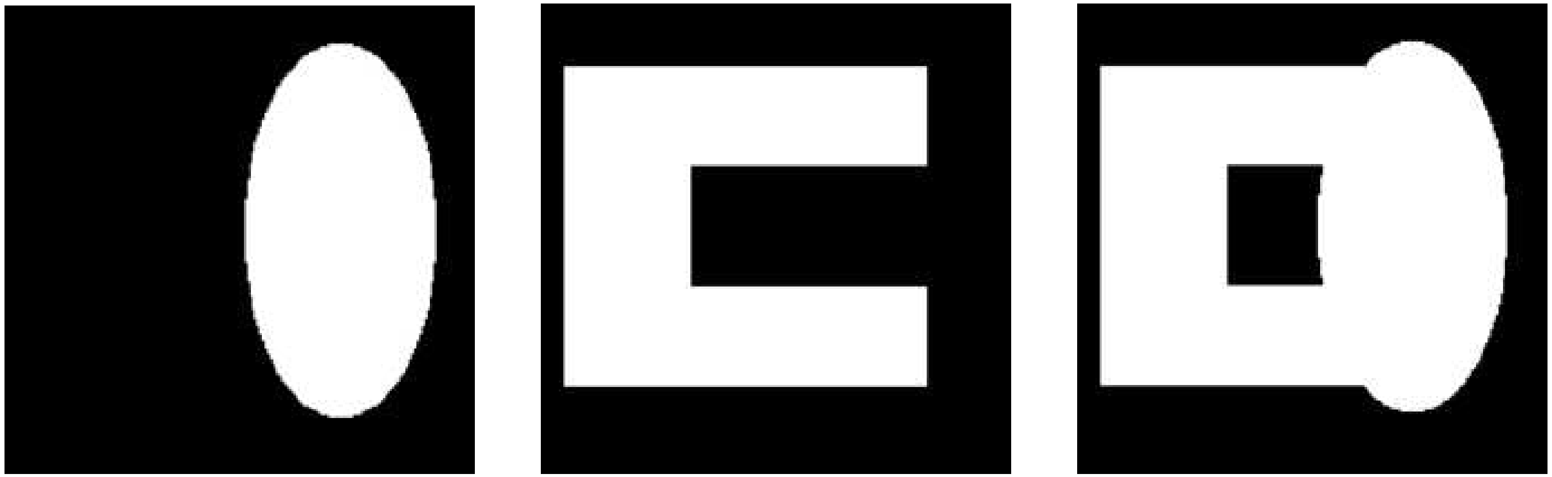
  - Ensembles qui se rencontrent :

$$X \uparrow Y \Leftrightarrow X \neq \emptyset \text{ et } Y \neq \emptyset; X \cap Y \neq \emptyset;$$

L'Union

Union ou réunion de deux ensembles :
On appelle union des deux ensembles X et Y, l'ensemble noté $X \cup Y$ des éléments qui appartiennent à X ou à Y.

$$X \cup Y = \{x; x \in X \text{ ou } x \in Y\}$$



Ensemble X   Ensemble Y $X \cup Y$

Propritétés de l'union

- L'union est commutative :

$$X \cup Y = Y \cup X$$

- L'union est associative :

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

- Autres propriétés :
  - Union avec l'ensemble vide : $X \cup \emptyset = \emptyset$
  - $Y \subset (X \cup Y)$, $X \subset (X \cup Y)$
  - $X \subset Y \Rightarrow (X \cup Y) = Y$

Relation entre l'union et l'intersection

L'union et l'intersection possèdent des propriétés analogues. Il existe également la propriété de distributivité liant ces deux opérateurs.

Relations entre les 2 opérateurs

- L'intersection distributive par rapport à l'union :

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

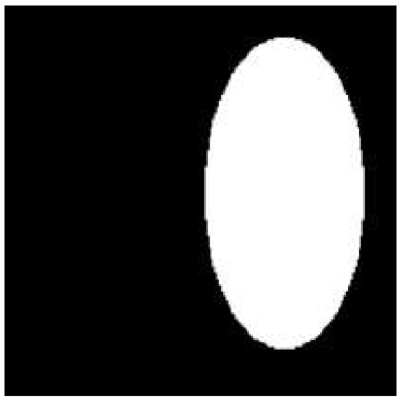
- La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (Y \cup Z)$$

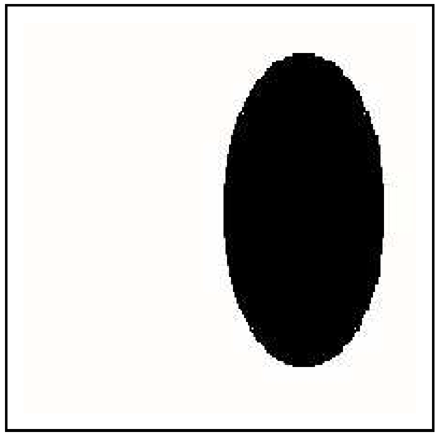
La complémentation

- Ensemble de référence E
  Pour la complémentation il faut à un autre ensemble E contenant X. Cet ensemble n'est pas défini au hasard mais va servir de référence pour toutes les opérations que l'on va faire. Par définition, X est un sous-ensemble de E.
- Définition
  Par définition le complémentaire d'un ensemble X par rapport à E est l'ensemble des éléments appartenant à E mais n'appartenant pas à X.

$$\mathcal{C}_E(X) = X^c = \overline{X} = \{x; x \in E \text{ et } x \notin X\}$$



X



$\mathcal{C}_E(X)$ (E : l'image)

Propriétés de la complémentation

- Le complémentaire du complémentaire redonne l'ensemble de départ :

$$\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E(X)) = (X^c)^c = X$$

- L'union de X et de son complémentaire donne l'ensemble de référence :

$$X \cup \mathcal{C}_E(X) = E$$

- L'intersection de X et de son complémentaire donne l'ensemble vide :

$$X \cap \mathcal{C}_E(X) = \emptyset$$

Les formules de Morgan

- Historique
  Morgan, mathématicien anglais du XIX^{e}siècle a établi des relations qui relient, l'intersection, l'union et la complémentation.
- Relations
  - Le complémentaire de l'intersection des deux ensembles X et Y est égal à l'union des complémentairesde chaque ensemble.

$$\mathcal{C}_E(X \cap Y) = \mathcal{C}_E(X) \cup \mathcal{C}_E(Y)$$

  - Le complémentaire de l'union des deux ensembles X et Y est égal à l'intersection des complémentaires de chaque ensemble.

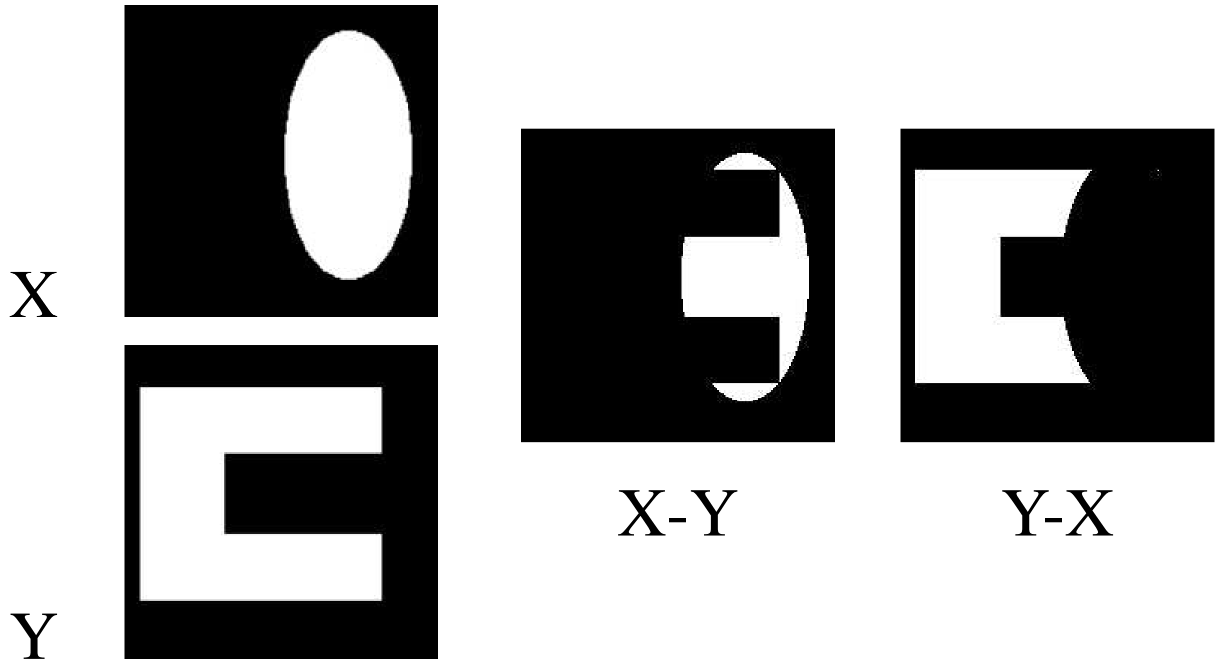
$$\mathcal{C}_E(X \cup Y) = \mathcal{C}_E(X) \cap \mathcal{C}_E(Y)$$

Les formules de Morgan se généralisent à un nombre quelconque d'ensembles.

Différence de deux ensembles

Définition :

La différence entre deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y.



Différence de deux ensembles : Propritétes

- Comportement :
  La différence entre des ensembles et la différence entre des nombres n'a pas toujours la même signification. La différence dans $\mathbb{Z}$ possède un élément neutre, zéro. Pour les ensembles, cet élément neutre est l'ensemble vide $\emptyset$.
  - Soit m et n deux nombres, on a :

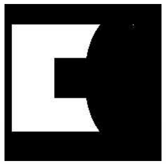
$$n - 0 = n \text{ et } n - m = 0 \Rightarrow n = m$$

  - Pour les ensembles, on a :

$$X - \emptyset = X \text{ et } X - Y = \emptyset \Rightarrow X \subset Y$$

La différence $X - Y$ est toujours un sous-ensemble de X. La différence $Y - X$ n'a donc rien à voir avec $X - Y$. On va donc introduire une autre loi de composition : **la différence symétrique.**

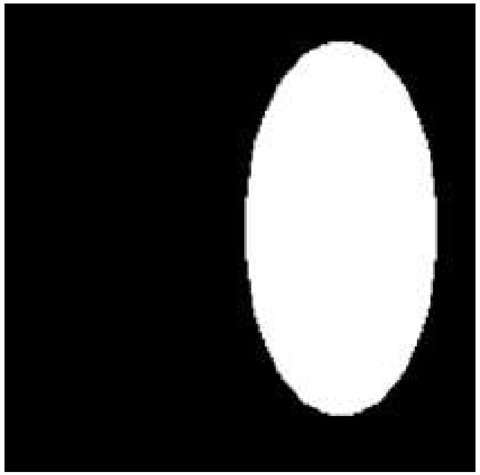
X-Y : 

Y-X : 

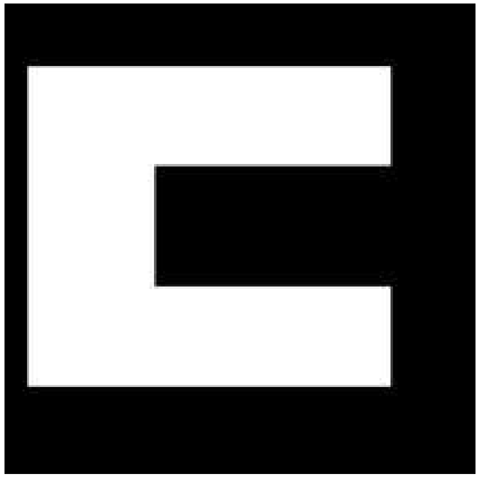
La différence symétrique

Définition :
La différence symétrique entre deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent qu'à X ou à Y.

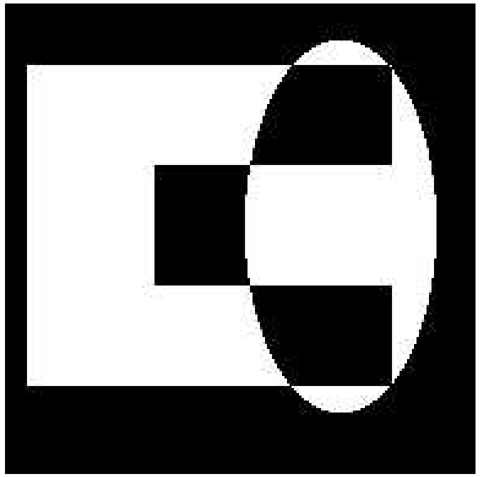
$$X/Y = X\Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$



X



Y



$X\Delta Y$

Propriétés de la différence symétrique

- La différence symétrique est associative

$$X/(Y/Z) = (X/Y)/Z$$

- La différence symétrique possède un élément neutre

$$X/\emptyset = X$$

- La différence symétrique est commutative

$$X/Y = Y/X$$

Ce n'est pas le cas de la différence simple.

Ensembles ordonnés et tréllis

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
  - Egalité et inclusion
  - Intersection, réunion, complémentation
  - Différence et différence symétrique
- **Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis**
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- Autres propriétés algébriques des opérateurs
- Algèbre de Minkowski
- Les ensembles convexes

Relation d'ordre

Définition :
Soit x, y et z trois éléments de l'ensemble E. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble est une relation d ordre si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. Réflexivité : $x \, \mathcal{R} \, y$
2. Antisymétrie : $x \, \mathcal{R} \, y,$ compatible avec $y \, \mathcal{R} \, x,$ si $x = y$
3. Transitivité : $x \, \mathcal{R} \, y$ et $y \, \mathcal{R} \, z$ impliquent $x \, \mathcal{R} \, z$

Par exemple,

- la relation « $a \leq \; b$ » est une relation d'ordre dans **R**.
- La relation d'inclusion « $X \subseteq Y$ » est également une relation d'ordre pour les ensembles.

Relation d'ordre

Notations :

- Si E est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$; on dira que deux éléments peuvent être comparés si on a au moins une des relations :

$$x \, \mathcal{R} \, y \text{ ou } y \, \mathcal{R} \, x.$$

- Si tous les éléments d'un ensemble E peuvent être comparés avec la relation $\mathcal{R}$, cet ensemble E est un ensemble **totalement ordonné**.
- Dans le cas contraire, l'ensemble E a un ordre partiel.

On notera que la relation « $a < b$ » pour les nombres ou « $X \subset Y$ » ne sont pas des relations d'ordre car elles ne sont pas réflexives.

Majorant et plus grand élément

- Soit E un ensemble ordonné et X un sous-ensemble de E. Un élément m de E est appelé majorant de X si tous les éléments de X sont plus petits que m.
- Dans le cas où m appartient également à X, on dit que X admet un plus grand élément qui est m.
- On montre que cet élément est unique. En effet, soit m et m' deux majorants de X appartenant à X. On peut écrire :

$$(m' \in X \Rightarrow m' < m) \text{ et } (m \in X \Rightarrow m < m') \Rightarrow m = m'$$

Borne supérieure

- Appelons $M(X)$ l'ensemble des majorants de X. Le majorant le plus intéressant est celui qui sera le plus petit. Soit s, cet élément. Ce plus petit élément est appelé borne supérieure (notée sup ou supremum).

$$s \in M(X) \text{ et } x \in M(X) \Rightarrow x > s$$

- Si s est la borne supérieure de X, en tant que majorant s est comparable à tous les éléments de X et les suit ; en tant que plus petit élément de M(X), s est comparable à tous les majorants et les précède.
- La notion de borne supérieure est plus générale que celle de plus grand élément. En effet, si X admet une borne supérieure s, alors s est le plus grand élément de X si et seulement si s appartient à X. La borne supérieure peut exister sans qu'il existe un plus grand élément. Cette borne supérieure est représentée par :

$$s = sup(X) = \vee(X)$$

Considérer $\mathbf{R}$ et $+\infty$.

Minorant, Borne inférieure et tréllis

- Minorant On utilise une démarche similaire pour définir un minorant m'. C'est un élément de E plus petit que n'importe quel élément de X.
- Borne inférieure
  Le plus grand des minorants de X est appelé borne inférieure (notée inf ou infimum).

$$s = inf(X) = \wedge(X)$$

- Treillis :
  On appelle treillis tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques ont toujours une borne inférieure et une borne supérieure. Dans le cas des ensembles, l'union de deux éléments correspond à la borne supérieure et l'intersection à la borne inférieure.

Autres propriétés algébriques des opérateurs

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
  - Egalité et inclusion
  - Intersection, réunion, complémentation
  - Différence et différence symétrique
- Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- **Autres propriétés algébriques des opérateurs**
  - Définitions
  - Comportement des opérateurs pour la croissance
- Algèbre de Minkowski
- Les ensembles convexes

Définitions : idempotence

Définitions
En dehors des propriétés de base que nous avons déjà définies, il en existe d autres qui nous seront très utiles, en particulier en morphologie mathématique :

- La propriété de croissance
- La propriété d'extensivité ou d'anti-extensivité
- La propriété d'idempotence

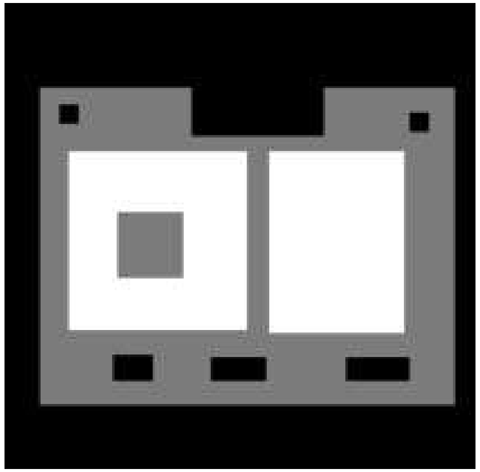
Propriété d'idempotence :
Appliquer une deuxième fois la transformation ne modifie pas le résultat de la première transformation.

$$\psi(\psi(X)) = \psi(X)$$

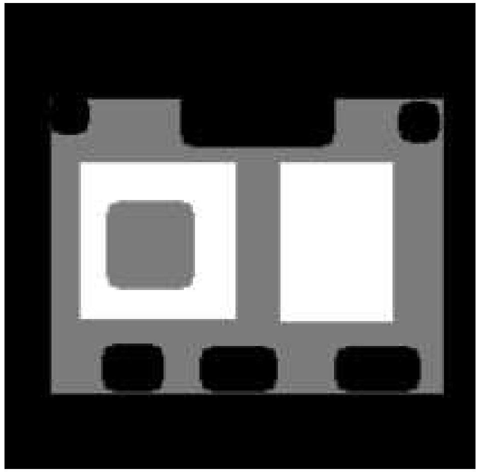
Définitions : croissance

Propriété de croissance

Soit deux ensembles X et Y tels que X soit inclus dans Y, on dit que la transformation ψ vérifie la propriété de croissance si $\psi(X)$ est inclus dans $\psi(Y)$.



X : □
Y : □+■



$\psi(X)$: □
$\psi(Y)$: □+■

Définitions : Extensivité

Extensivité, anti-extensivité :
Une transformation est extensive si son résultat est toujours plus grand que l'original. On définit la notion d'anti-extensivité par dualité.

- Extensivité : $X \subseteq \psi(X)$

- X : □
- $\psi(X)$: □+■

X : □

- Anti-extensivité : $X \supseteq \psi(X)$.

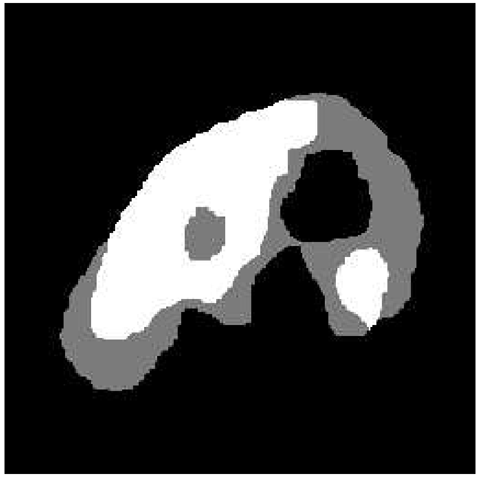
- $\psi(X)$: □
- X : □+■

X : □

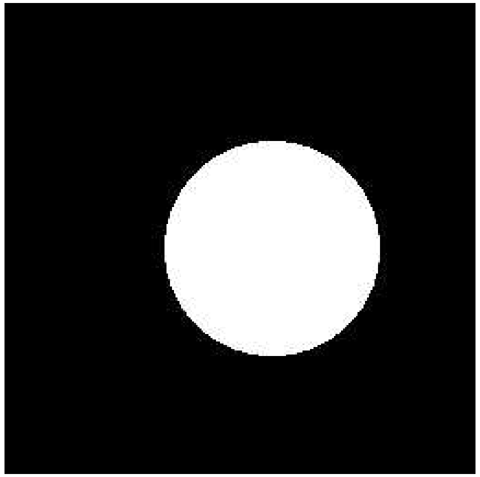
Comportement de l'intersection

L'intersection est une transformation croissante

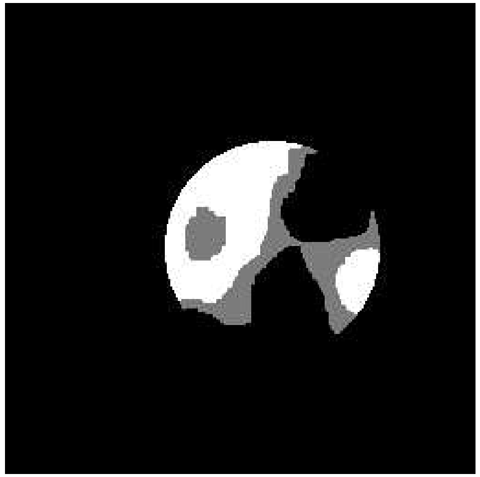
$$Y_1 \subset Y_2 \implies (X \cap Y_1) \subset (X \cap Y_2)$$



$Y_1(\square) \subset Y_2(\square + \blacksquare)$



X

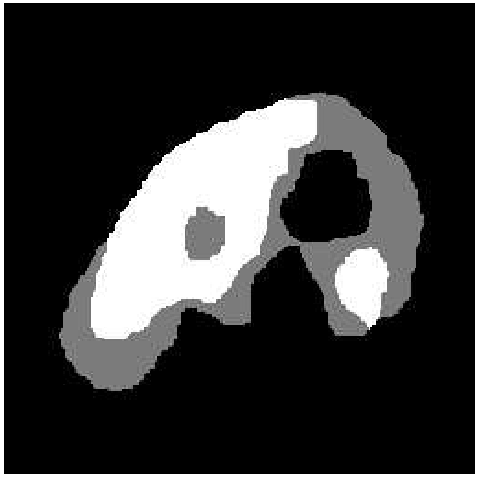


$(X \cap Y_1) \subset (X \cap Y_2)$

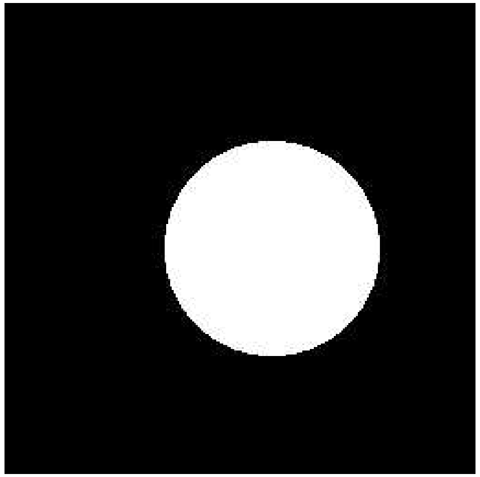
Comportement de l'union

L'union est une transformation croissante

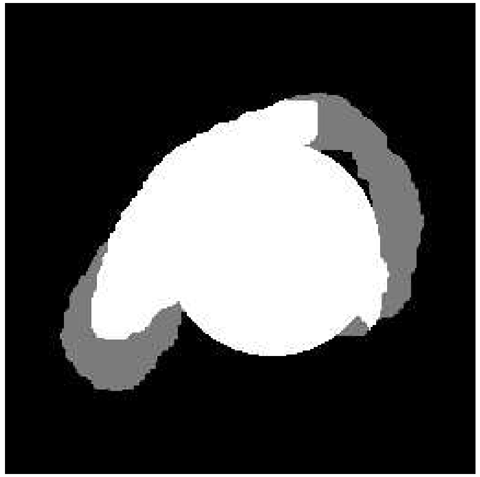
$$Y_1 \subset Y_2 \implies (X \cup Y_1) \subset (X \cup Y_2)$$



$Y_1(\square) \subset Y_2(\square + \blacksquare)$



X



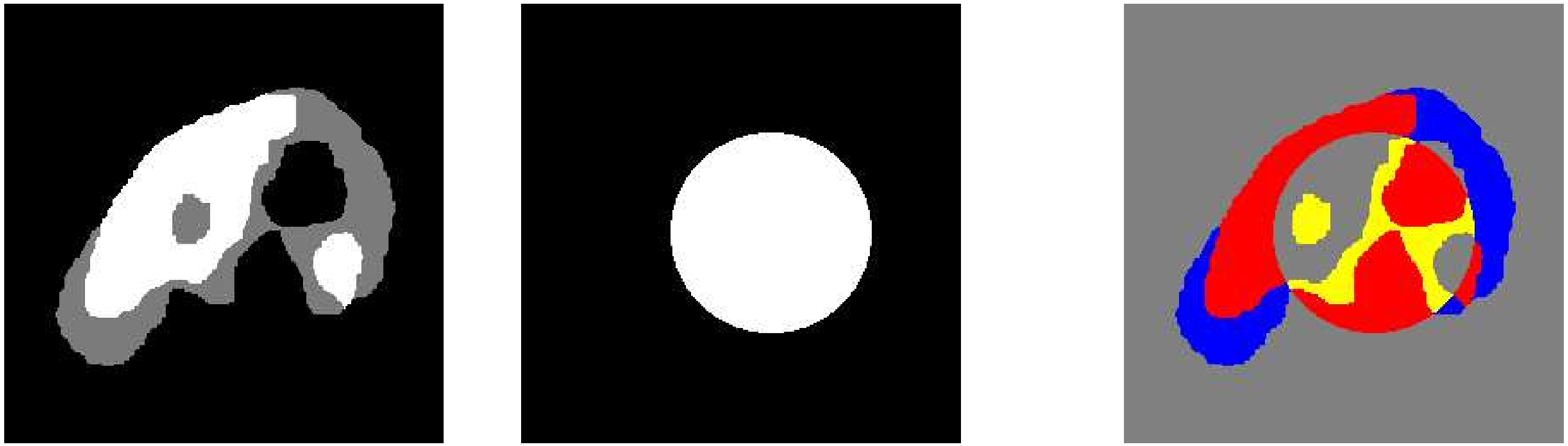
$(X \cup Y_1) \quad \subset \quad (X \cup Y_2)$

$\square \qquad\qquad \square\blacksquare$

Comportement de la diférence symétrique

La différence symétrique **n'est pas** une transformation croissante

$$Y_1 \subset Y_2 \not\Longrightarrow (X/Y_1) \subset (X/Y_2)$$

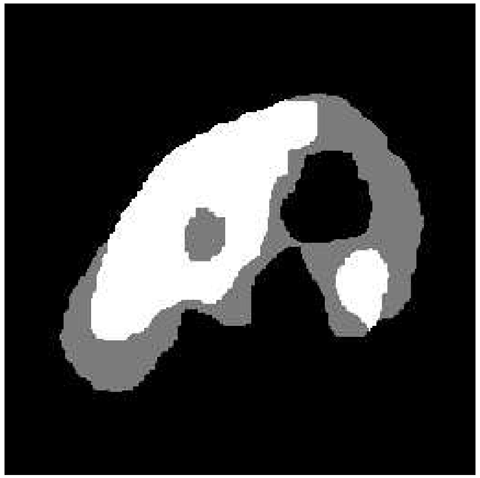


$Y_1(\square) \subset Y_2(\square + \blacksquare)$ X (X/Y_1) (X/Y_2)

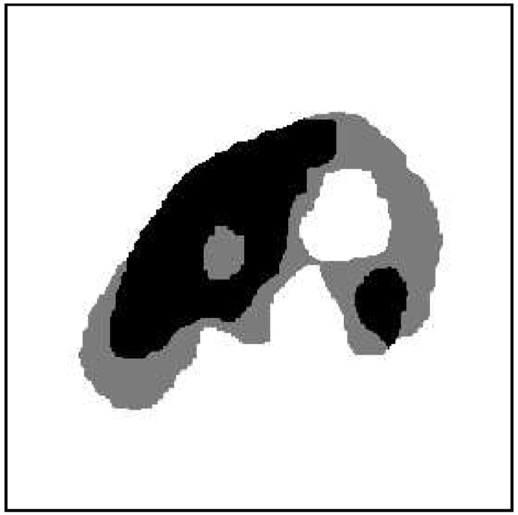
Comportement de la complémentation

La complémentation est une transformation **dé**croissante

$$Y_1 \subset Y_2 \implies \mathcal{C}_E(Y_1) \supset \mathcal{C}_E(Y_2)$$



$Y_1(\square) \subset Y_2(\square + \blacksquare)$



$(\mathcal{C}_E(Y_1)) \quad \supset \quad \mathcal{C}_X(Y_2)$

$\square\blacksquare \qquad\qquad \square$

Algèbre de Minkowski

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
  - Egalité et inclusion
  - Intersection, réunion, complémentation
  - Différence et différence symétrique
- Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- Autres propriétés algébriques des opérateurs
  - Définitions
  - Comportement des opérateurs pour la croissance
- **Algèbre de Minkowski**
  - Translation d'un ensemble
  - Addition de Minkowski
  - Soustraction de Minkowski
- Les ensembles convexes

Algèbre de Minkowski

- H. Minkowski (Mathématicien allemand) «Volumen und Oberfläche» Math. Ann. 1903, 57, 447-495.
- Opérateurs de Minkowski
  - Définition de la translation d'un ensemble
  - Addition de Minkowski
  - Soustraction de Minkowski
- Opérateurs définis dans un espace métrique
  Un espace E est un ensemble de points. Cet espace devient un espace métrique s'il est muni d'une distance d.
  Définition de la distance :
  Application d de $E \times E$ dans R_+ vérifiant les axiomes suivants :

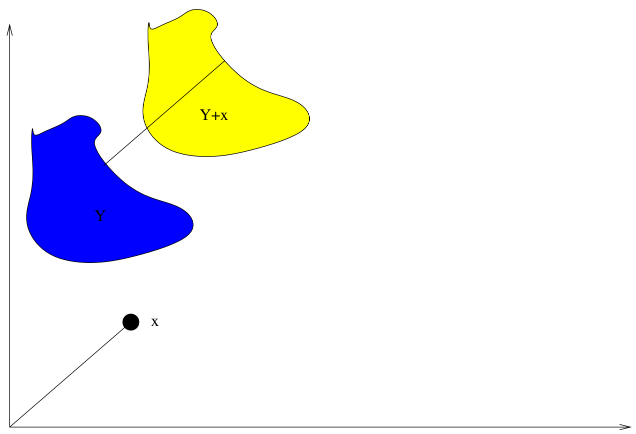
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2 & d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y & \text{séparation} \\ \forall (x,y) \in E^2 & d(x,y) = d(y,x) & \text{symétrie} \\ \forall (x,y,z) \in E^3 & d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) & \text{Inégalité triangulaire} \end{cases}$$

Translation d'un ensemble

Définition :
Pour un ensemble donné Y, défini dans un espace métrique muni d'une origine, la translation d'un ensemble Y par un point x est définie par :

$$Y + x = \{y + x; y \in Y\}$$

Le signe +, dans le terme ensembliste de droite est relatif à une addition vectorielle. En effet, le point x permet de définir dans l'espace métrique un vecteur.

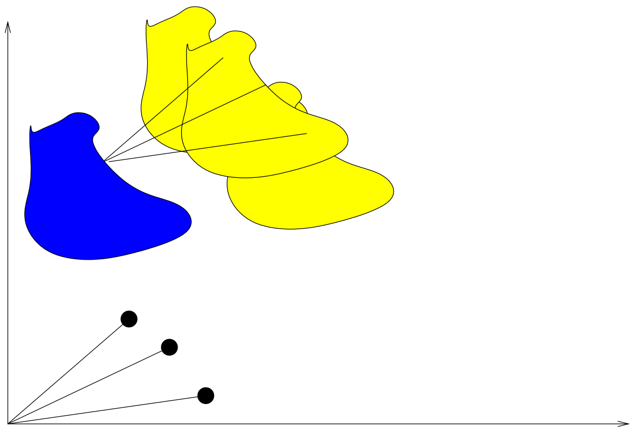


Addition de Minkowski

Soient un ensemble X et un ensemble B, définis l'espace $\mathbf{R}^2$ (on peut généraliser à $\mathbf{R}^n$). L'addition de Minkowski de X par B est construite en translatant X par chaque élément b de B et en prenant l'union du résultat des translations.

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X + b$$

- X : ■ (bleu)
- B : ●
- $X \oplus B$: ■ (jaune)



Addition de Minkowski :Propriétés

- Si $B = \{x\}$ (B réduit à un point), on a uniquement translation de X :

$$X \oplus \{b\} = X + b$$

- Si $B = \{O\}$ (B réduit à l'origine de l'espace), on a :

$$B \oplus \{O\} = B$$

- Propriétés dérivées de l'union
  - L'addition de Minkowski est commutative : $X \oplus B = B \oplus X$
  - L'addition de Minkowski est associative :

$$X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$$

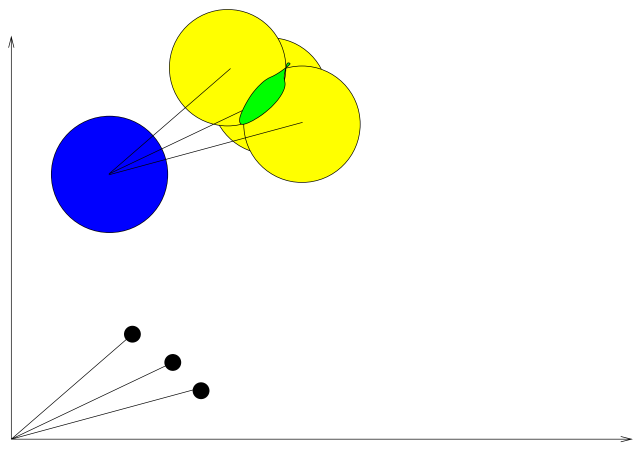
  - L'addition de Minkowski est croissante :

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1 \oplus B \subset Y_2 \oplus B$$

Soustraction de Minkowski

Définition :
Soient un ensemble X et un ensemble B, définis dans R^2 (on peut généraliser à R^n). La soustraction de Minkowski est construite en translatant X par chaque élément b de B et en prenant l'intersection du résultat des translations.

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X + b$$



- X : ■
- B : ●
- $X \ominus B$: ■

Soustraction de Minkowski : Propriétés

- Si $B = \{x\}$ (B réduit à un point), on a uniquement translation de X :

$$X \ominus \{b\} = X + b$$

- Si $B = \{O\}$ (B réduit à l'origine de l'espace), on a :

$$X \ominus \{O\} = X$$

- La soustraction de Minkowski n'est pas commutative :

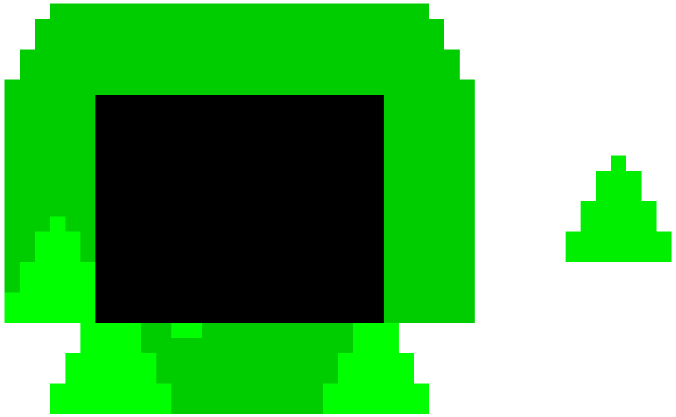
$$X \ominus B \neq B \ominus X$$

- La soustraction de Minkowski est croissante :

$$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow Y_1 \ominus B \subset Y_2 \ominus B$$

Opérations de Minkowski : Exemple

- addition



X=■, B=■, $X \oplus B$ =■+■.

- Soustraction :

X=■+■, B=■, $X \ominus B$ =■.

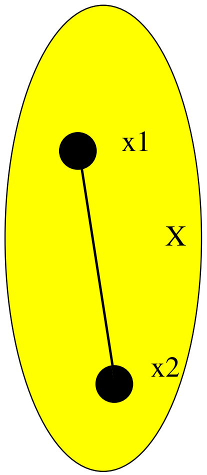
Les ensembles convexes

- Les opérateurs ensemblistes de base et les propriétés usuelles
- Notions sur les ensembles ordonnés et les treillis
  - Ensembles ordonnés
  - Treillis
- Autres propriétés algébriques des opérateurs
  - Définitions
  - Comportement des opérateurs pour la croissance
- Algèbre de Minkowski
  - Translation d'un ensemble
  - Addition de Minkowski
  - Soustraction de Minkowski
- **Les ensembles convexes**
  - Définition
  - Propriétés de l'union et l'intersection d'ensembles convexes
  - Enveloppe convexe

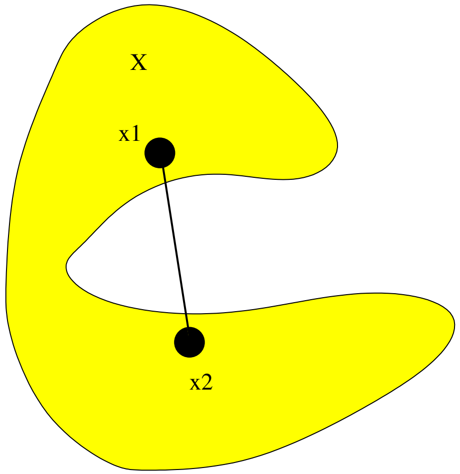
Les ensembles convexes

Définition :
Un ensemble X est dit convexe si pour tout couple (x_1, x_2) de points appartenant à X, le segment $[x_1 - x_2]$ est inclus dans X.

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \forall t \in [0,1] \quad t.x_1 + (1-t)x_2 \in X$$



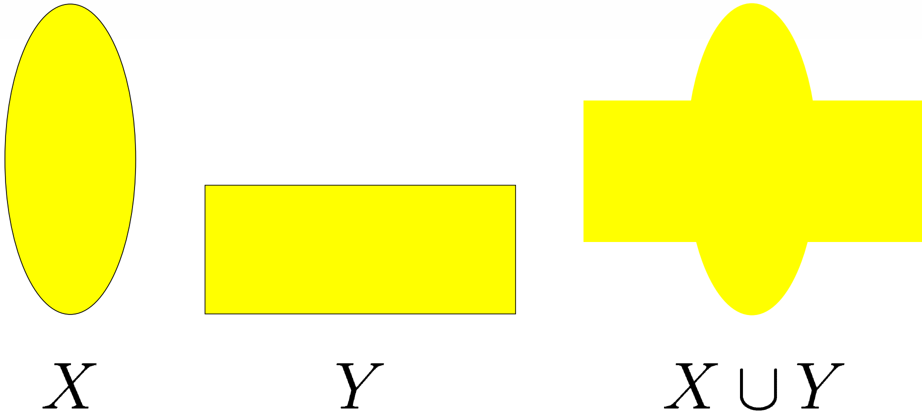
convexe



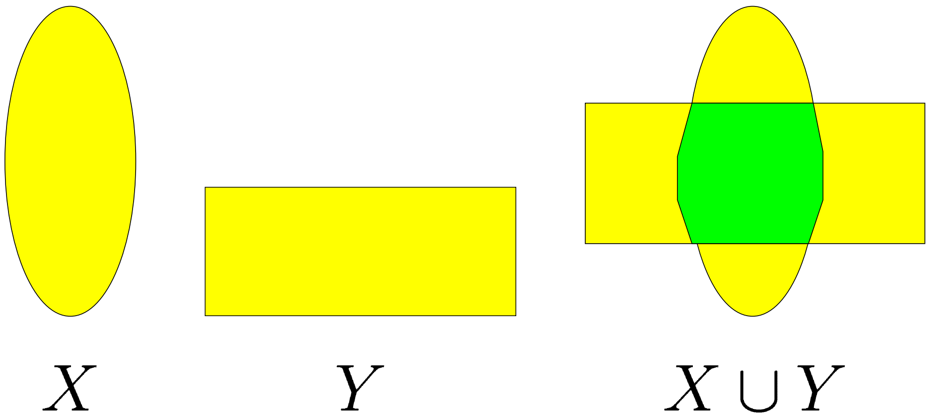
non convexe

Ensembles convexes : Propriétés

- L'union d'ensembles convexes n'est généralement pas convexe.

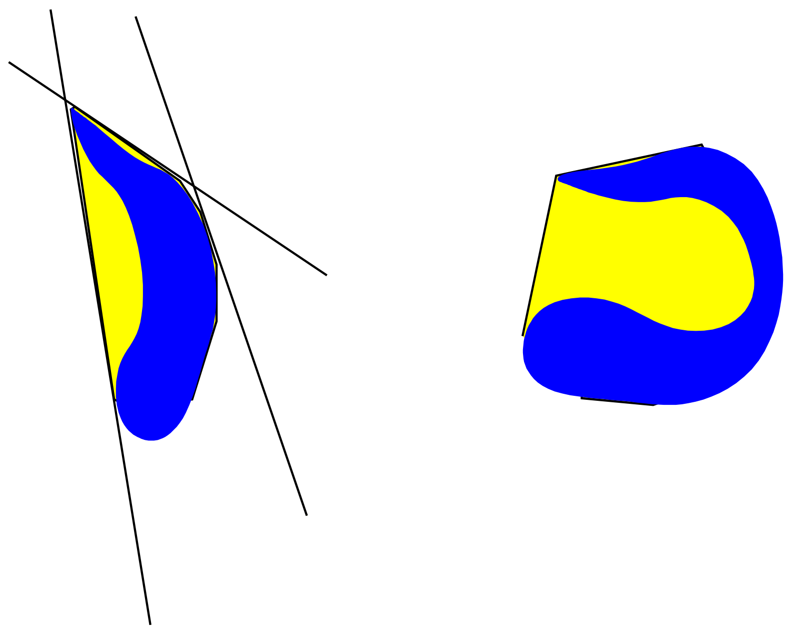


- L'intersection d'ensembles convexes est convexe



Enveloppe convexe

- À chaque ensemble X, on peut associer un ensemble convexe dans lequel il est totalement inclus. Le plus petit est appelé enveloppe convexe et notée $C_V(X)$.
- Si X est défini dans R^2, l'enveloppe convexe est l'intersection de tous les demi-plans qui contiennent l'ensemble X.



$X =$ ■ (bleu)

$C_v(X) =$ ■■ (bleu et jaune)