Morphologie mathématique

Topologie et Images

Luc Brun (d'après le cours de M. Coster)

Plan

- Topologie
  - Topologie à base de distances, de voisinages, d'ouverts,
  - Définitions : fermé,intérieur, adhérence, frontière.
- Notion de continuité et de limite
  - Notion de continuité
  - Limite inférieure et limite supérieure d'une suite numérique
- Application de la notion de continuité et de limite aux ensembles
  - Distance d'un point à un ensemble,
  - distance euclidienne entre 2 ensembles
  - Définition de la limite d'une suite d'ensemble
  - Opérateurs classiques et continuité
- Autres notions relatives à la topologie
  - L'homéomorphisme
  - La connexité
  - Caractéristiques d'une surface
  - Propriétés topologiques

Boules dans un espace métrique

- Topologie : Étude de la notion de «proximité» et des propriétés qui s'y rattachent.
- Définition d'un voisinage : Les boules
  - Boule ouverte de centre a :

$$B_o(a, r) = \{x \in E; d(a, x) < r\}$$

  - Boule fermée de centre a :

$$B_f(a, r) = \{x \in E; d(a, x) \leq r\}$$

  - Sphère de centre a :

$$S(a, r) = \{x \in E; d(a, x) = r\}$$

Voisinages

- Problème de la distance : $d(x, y) = d(y, x)$.
- Distances non symétriques :

Voisinage du voilier   Voisinage d'un circuit

- Nécessité d'une définition plus générale de la notion de proximité.

Filtres de voisinages : Hausdorff

- filtre de voisinage. $\mathcal{V}(x) \in \mathcal{P}(E)$ est un filtre de voisinages de x ssi :

1. Tout sur-ensemble d'un voisinage de x est un voisinage de x.

$$\forall (V, W), V \in \mathcal{V}(x), V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$$

2. L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x

$$\forall (V, W) V \in \mathcal{V}(x), W \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(x)$$

3. Tout voisinage de x contient x : $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$
4. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U \in \mathcal{V}(x), U \subset V$ tel que V est un voisinage de chaque point de U.

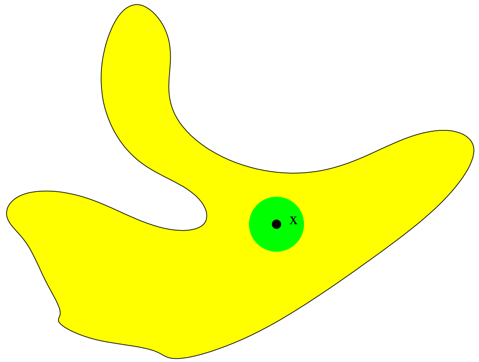
$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists U \in \mathcal{V}(x), U \subset V ; \forall y \in U, V \in \mathcal{V}(y)$$

Base de voisinages

- Un ensemble $\mathcal{B}(x)$ consititue une base de voisinage de x ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x); B \subset V$$

- Dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes consitue une base de voisinages.



Ouverts et topologie

- Ouvert : Un ensemble $\Omega \subset E$ est dit ouvert s'il est voisinage de chacun de ces points.

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(x)$$

- Topologie : On appelle topologie sur E toute partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$\begin{cases} (O_1) & \emptyset \in \mathcal{T} \text{ et } E \in \mathcal{T} \\ (O_2) & \forall (A,B) \in \mathcal{T}^2 \qquad A \cap B \in \mathcal{T} \\ (O_3) & \forall I, \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \end{cases}$$

  Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les **ouverts** de la topologie $\mathcal{T}$.
- Remarque : Les deux définitions sont équivalentes.
  - Une base de voisinages définie une topologie,
  - Étant donné une topologie un voisinage de x est un ensemble contenant un ouvert contenant x.

Les Fermés

- Un ensemble est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

$$A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{C}_E(A) \in \mathcal{T}$$

- Propriétés :

$$\begin{cases} (F_1) & \emptyset \in \mathcal{F} \text{ et } E \in \mathcal{F} \\ (F_2) & \forall (A, B) \in \mathcal{T}^2 \qquad\qquad A \cup B \in \mathcal{T} \\ (F_3) & \forall I, \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I, \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Espaces topologiques séparés

- Séparation T_0 :
  Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit T_0 séparé ssi

$$\forall (x, y) \in E^2 \, \exists U \in \mathcal{T} \,|\, (x \in U \text{ et } y \notin U) \text{ ou } (x \notin U \text{ et } y \in U)$$

- Séparation T_1 : Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit T_1 séparé ssi

$$\forall (x, y) \in E^2 \, \exists (U, V) \in \mathcal{T} \,|\, (x \in U \text{ et } y \notin U) \text{ et } (y \in V \text{ et } x \notin V)$$

- Séparation T_2 : Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit T_2 séparé (ou séparé) ssi :

$$\forall (x, y) \in E^2 \, \exists (V, W) \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y) \mid V \cap W = \emptyset$$

Intérieur

- $a \in A$ est intérieur à A ssi A est un voisinage de a.
- L'ensemble des points intérieurs de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est appelé l'intérieur de A.
- $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
- Propriétés :
  - $\overset{\circ}{A} \subset A$
  - $\overset{\circ}{A} = A \Rightarrow A$ est ouvert,
  - Propriété d'idempotence : $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$
  - Propriété de croissance : $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
  - Distributivité par rapport à l'intersection : $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
  - mais : $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subsetneq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Adhérence

- Un point a de A est dit adhérent à A ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad V \cap A \neq \emptyset$$

- On appelle adhérence de A, noté $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérent à A.
- Propriété 1 : $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermées contenant A. C'est donc le plus petit fermé contenant A.
- Propriétés 2 :
  - $\overline{A} \subset A$ et $\overline{A} = A \Rightarrow A$ est un fermé de $\mathcal{T}$,
  - Propriété d'idempotence : $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
  - Propriété de croissance : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
  - Distributivité par rapport à l'union : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - mais : $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\mathcal{C}_E(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{C}_E(A)}}$ et $\mathcal{C}_E(\overset{\circ}{A}) = \overline{\mathcal{C}_E(A)}$

Frontière

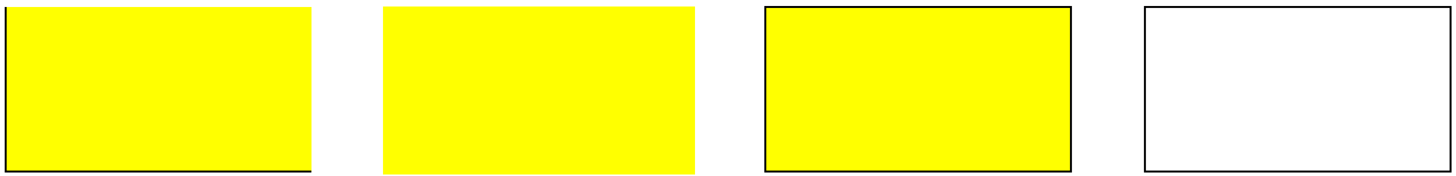
- a est un point frontière de A ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad V \cap A \neq \emptyset \text{ et } V \cap \mathcal{C}_E(A) \neq \emptyset$$

- L'ensemble des points frontière de A définit la frontière de A notée ∂A.

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_E(A)} = \overline{A} \cap \mathcal{C}_E(\mathring{A}) = A - \mathring{A}$$

- La frontière est un fermé (intersection de 2 fermés)



A $\qquad \mathring{A} \qquad \overline{A} \qquad \partial A$

Notion de continuité et de limite

- Topologie
  - Topologie à base de distances, de voisinages, d'ouverts,
  - Définitions : fermé,intérieur, adhérence, frontière.
- Notion de continuité et de limite
  - Notion de continuité
  - Limite inférieure et limite supérieure d'une suite numérique
- Application de la notion de continuité et de limite aux ensembles
  - Distance d'un point à un ensemble,
  - distance euclidienne entre 2 ensembles
  - Définition de la limite d'une suite d'ensemble
  - Opérateurs classiques et continuité
- Autres notions relatives à la topologie
  - L'homéomorphisme
  - La connexité
  - Caractéristiques d'une surface
  - Propriétés topologiques

Continuité d’une fonction

- f de E dans F est continue en x_0 ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)) \quad \exists U \in \mathcal{V}(x_0)); f(U) \subset V$$

- Autre caractérisation : L’image réciproque d’un voisinage est un voisinage,

- f est continue sur E ssi elle est continue en chaque point $x \in E$.
- Autres caractérisations :
  - L’image réciproque d’un ouvert est un ouvert,
  - L’image réciproque d’un fermé est un fermé.

Suites

Limite : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie dans E converge vers $l \in E$ ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N\ x_n \in V$$

Limite et continuité : $f : E \to F$ est continue en A ssi il existe $a \in D \subset E$, tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie sur D et convergent en a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet $f(a)$ pour limite.

Valeurs d'adhérence : Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'un espace E. $a \in E$ est valeur d'adhérence de la suite ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists n \geq N \quad x_n \in V$$

- Autre Caractérisation : a est une valeur d'adhérence de la suite s'il existe une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers a.
- Posons $X_n = \{x_k \mid k \geq n\}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{X_n}$.

Limite sup et inf

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbf{R}}$ et $X_n = \{x_k \mid k \geq n\}$. Les suites $a_n = supX_n$ et $b_n = infX_n$ sont convergentent dans $\overline{\mathbf{R}}$ et admettent respecivement pour limite la plus grande et la plus petite valeur propre de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Les limites sup et inf de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont respetivement notées $\overline{\lim}\, x_n$ et $\underline{\lim}\, x_n$.
- $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ssi :$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

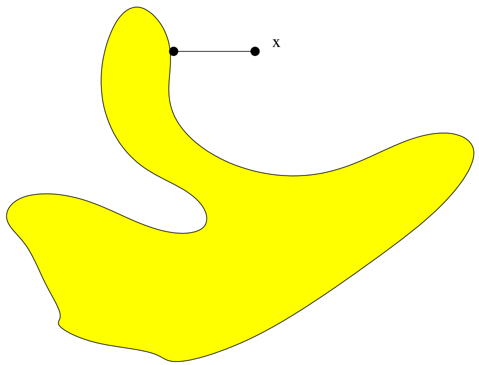
Application aux ensembles

- Topologie
  - Topologie à base de distances, de voisinages, d’ouverts,
  - Définitions : fermé,intérieur, adhérence, frontière.
- Notion de continuité et de limite
  - Notion de continuité
  - Limite inférieure et limite supérieure d’une suite numérique
- Application de la notion de continuité et de limite aux ensembles
  - Distance d’un point à un ensemble,
  - distance euclidienne entre 2 ensembles
  - Définition de la limite d’une suite d’ensemble
  - Opérateurs classiques et continuité
- Autres notions relatives à la topologie
  - L’homéomorphisme
  - La connexité
  - Caractéristiques d’une surface
  - Propriétés topologiques

Distance d'un point à un ensemble

- La distance d un point x à l'ensemble Y est définie comme étant la distance entre x et le point de Y le plus proche de x.

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$$



«Distance» entre deux ensembles

- Généralisation de la distance point/ensemble : $\delta(X,Y) = \inf_{x\in X, y\in Y} d(x,y)$
- Topologie à base de semi normes :
  - Topologie au sens de Wijsman

$$d_Q^W(A,B) = \sup_{x\in Q} |d(x,A) - d(x,B)|, Q \in \mathcal{P}f(E)$$

  - Topologie au sens Attouch-Wets

$$d_X(A,B) = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|, X \in \mathcal{F}b(E)$$

  - Topologie au sens Hausdorff

$$d_E(A,B) = \sup_{x\in E} |d(x,A) - d(x,B)|$$

Limites d'ensembles

- Soit $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ensemble de E, on dira que $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers Y
  - Au sens de Wijsman si :

$$\forall x \in E \quad \lim_{n\to+\infty} d(x,Y_n) = d(x,Y)$$

  - Au sens de Attouch-Wets

$$\forall X \in \mathcal{F},\ X \text{ borné}, \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |d(x,Y_n) - d(x,Y)| = 0$$

  - Au sens d'Hausdorff :

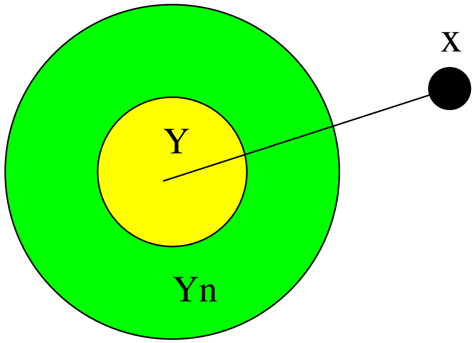
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |d(x,Y_n) - d(x,Y)| = 0$$

- Remarque : Nous nous restreignons à la convergence de Wijsman.

Exemple

- Soit $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'ensemble de $\mathbf{R}^2$ définie par $Y_n = B_o(0, 1-\frac{1}{n})$ et $Y = B_o(0,1)$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}^2 \quad \lim_{n\to+\infty} d(x, Y_n) &= \lim_{n\to+\infty} max(0, \|x\| - (1-\tfrac{1}{n})) \\ &= max(0, \|x\| - 1)) \\ &= d(x, Y) \\ &= d(x, B_f(0,1))\end{aligned}$$



- La suite converge simultanément vers Y et $\overline{Y}$. On se restreint à $\mathcal{F}$ (convergence unique si elle existe)

Continuité de la réunion

Soit F_0 un fermé fixe et soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés qui converge vers le fermé F.

$$\begin{aligned}
\forall x \in E \quad \lim_{n\to+\infty} d(x, F_n \cup F_0) &= \lim_{n\to+\infty} \min\left(d(x,F_n), d(x,F_0)\right) \\
&= \min\left(\lim_{n\to+\infty} d(x,F_n), d(x,F_0)\right) \\
&= \min\left(d(x,F), d(x,F_0)\right) \\
&= d(x, F \cup F_0)
\end{aligned}$$

Non continuité de l'intersection

- A titre d'exemple considérons la suite $Y_n = (0, \frac{1}{n})$ de $\mathbf{R}^2$. On a assez trivialement :

$$\lim_{n \to +\infty} Y_n = \{(0,0)\} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}^2, \ \lim_{n \to +\infty} d(x, Y_n) = d(x, \{(0,0\}) = \|x\|$$

- Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Y_n \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ et $d(x, \emptyset)$ n'est pas défini (ou vaut 0 celon certaines définitions).
- Toutefois l'intersection vérifie une propriété de même nature que la continuité, mais un peu plus restrictive : il s'agit de la semi-continuité.

Semi continuité supérieure et inférieure

- Soit F_n une suite de fermés du plan,
- x appartient à limite inf de $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ($\underline{\lim}_{n\to+\infty} F_n$) s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ passant par chaque F_n et convergent vers x :

$$x \in \underline{\lim}_{n\to+\infty} F_n \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbf{N}}; \forall n \in \mathbf{N},\ x_n \in F_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

- x appartient à limite sup de $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ($\overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n$) s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dont une suite extraite $(x_n)_{n\in S}$, S infini passe par chaque F_n, $n \in S$ et converge vers x.

$$\begin{aligned} x \in \overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n \quad \Leftrightarrow \quad & \exists (x_n)_{n\in S}; S \subset \mathbf{N} \text{ infini tel que} \\ & \forall n \in S,\ x_n \in F_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty, n\in S} x_n = x \end{aligned}$$

- On a :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} F_n \subset \overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n$$

Caractérisation des limites sup et inf

- Soit (E,d) un espace métrique
- $x \in \underline{\lim}\, F_n$ ssi toute boule fermée centrée sur x rencontre tous les F_n a partir d'un certain N

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbf{N} \,/\, \forall n \in \mathbf{N}\ \ n \geq N\ B_f(x,\varepsilon) \cap F_n \neq \emptyset$$

- $x \in \overline{\lim}\, F_n$ ssi toute boule fermée centrée sur x rencontre une infinité de F_n a partir d'un certain N

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists S \subset \mathbf{N}\ ,\text{S infini}, \forall n \in S\ B_f(x,\varepsilon) \cap F_n \neq \emptyset$$

- On a :

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} F_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (\overline{\bigcup_{p=n}^{+\infty} F_p})$$

Applications continues supérieurement/inférieur

- Soit alors ψ une transformation définie sur F à valeur dans F. On dit que ψ est semi-continue supérieurement pour tout fermé F et toute suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers F si :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \psi(F_n) \subset \psi(F)$$

- On dit que ψ est semi-continue inférieurement pour tout fermé F et toute suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers F si :

$$\psi(F) \subset \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, \psi(F_n)$$

Si la transformation est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, elle est continue

Semi continuité supérieure de l'intersection

- Soit une suite de fermée $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers F. Il s'agit de montrer que :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(F_n \cap F_0) \subset F \cap F_0$$

- Soit $x \in \overline{\lim}_{n\to+\infty}(F_n \cap F_0)$:

$$\begin{aligned}
& \forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbf{N} \,/\, \forall n \in \mathbf{N}\ \ n \geq N\ B_f(x,\varepsilon) \cap (F_n \cap F_0) \neq \emptyset \\
\Rightarrow\ & \forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbf{N} \,/\, \forall n \in \mathbf{N}\ \ n \geq N\ B_f(x,\varepsilon) \cap F_n \neq \emptyset \text{ et } x \in F_0 \\
\Rightarrow\ & x \in \overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n \text{ et } x \in F_0 \\
\Rightarrow\ & x \in F \cap F_0
\end{aligned}$$

Semi continuité inférieure de la complémentatio

- Soit une suite de fermée $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers F. $\mathcal{C}_E(F)$ n'étant pas fermé on prend le plus petit fermé le contenant. Il s'agit donc de montrer que :

$$\overline{\mathcal{C}_E(F)} \subset \underline{\lim}_{n\to+\infty} \mathcal{C}_E(F_n)$$

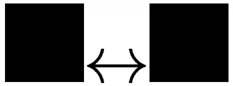
- Soit $x \in \mathcal{C}_E(F)$.

$$\begin{array}{lcl}
x \in F & \Leftrightarrow & \lim_{n\to+\infty} d(x,F_n) = 0 \\
x \in \mathcal{C}_E(F) & \Rightarrow & \lim_{n\to+\infty} d(x,F_n) \neq 0 \\
 & \Rightarrow & \exists N \in \mathbf{N}, \epsilon_1 > 0 \,|\, \forall n \geq N \; B_f(x,\epsilon_1) \cap F_n = \emptyset \\
 & \Rightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \,|\, \forall n \geq N \; B_f(x,\epsilon_1) \cap \mathcal{C}_E(F_n) \neq \emptyset \\
 & \Rightarrow & x \in \underline{\lim}\, \mathcal{C}_E(F_n)
\end{array}$$

- On conclue de même si $x \in \partial F$. On a donc conclu pour $\overline{\mathcal{C}_E(F)}$.

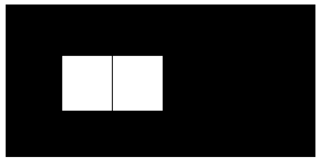
Exemple

- Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de 2 carrés séparés par une distance $\frac{1}{n}$.



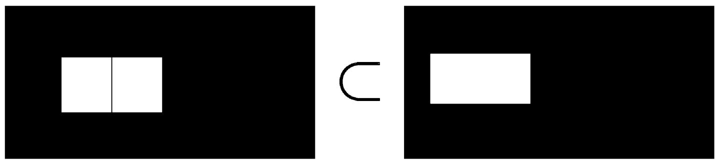
F_n

$F = \lim_{n\to+\infty} F_n$



$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \mathcal{C}_E(F_n)$

$\mathcal{C}_E(F)$



Autres notions relatives à la topologie

- Topologie
  - Topologie à base de distances, de voisinages, d'ouverts,
  - Définitions : fermé,intérieur, adhérence, frontière.
- Notion de continuité et de limite
  - Notion de continuité
  - Limite inférieure et limite supérieure d'une suite numérique
- Application de la notion de continuité et de limite aux ensembles
  - Distance d'un point à un ensemble,
  - distance euclidienne entre 2 ensembles
  - Définition de la limite d'une suite d'ensemble
  - Opérateurs classiques et continuité
- Autres notions relatives à la topologie
  - L'homéomorphisme
  - La connexité
  - Caractéristiques d'une surface
  - Propriétés topologiques

Homéomorphisme

- En déformant de manière continue une première surface, on peut tendre vers la forme d’une seconde surface.
- **Définition :** Un homéomorphisme est une transformation bijective et bi-continue (entre espaces topologiques). Elle traduit un peu la notion de réversibilité en thermodynamique. Cette notion de réversibilité est importante : en effet le bouchage d’un trou n’est pas une transformation homéomorphe, car la transformation inverse n’est pas continue.

| Z U I S J L M W C V N

A R

E F T Y $\in$

$\rightarrowtail$ H

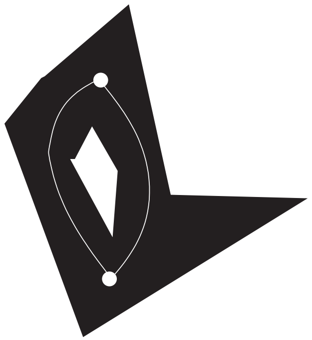
B

Ensembles connexes

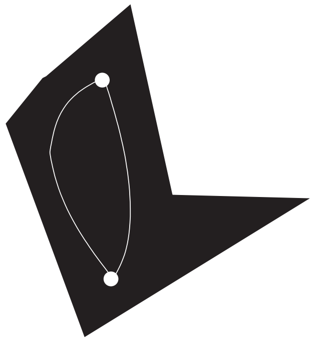
- Un ensemble E est connexe s'il ne vérifie pas une des propositions suivante (qui sont équivalentes) :
  1. Il existe une partie propre de E (autre que E et $\emptyset$) à la fois ouverte et fermée.
  2. Il existe une partition de E en 2 ouverts
  3. Il existe une partition de E en 2 fermés.
- Un ensemble connexe ne peut pas être partitionné en un ensemble d'ouverts ou de fermés.

Connexité par arc

- Un ensemble X est dit connexe par arc ssi pour tout x et y appartenant à X, existe un chemin totalement inclus dans X et connectant x et y.
- Un ensemble est dit simplement connexe ssi pour tout couple de point x et y et tout chemin C, C' joignant x et y C coïncide avec C' à une homotopie près.



Ensemble connexe par arc

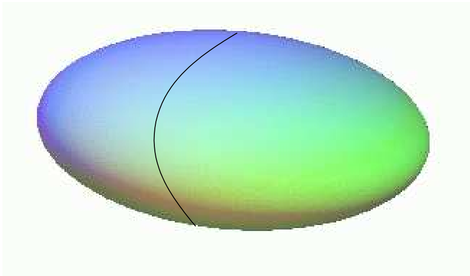


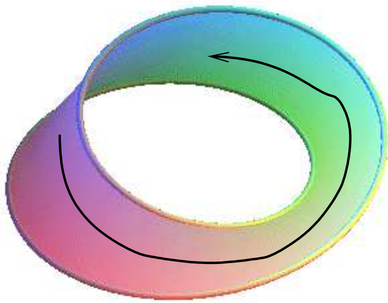
Ensemble simplement connexe

- Un ensemble connexe par arc est connexe.

Caractéristiques d'une surface

- Les surfaces sont définis par 3 caractéristiques : orientation, genre et bord.
- Surface orientable et non orientable : Une surface est dite orientable si en partant d'un point d'une courbe fermée faisant le tour de la surface, on revient du même coté de la surface.



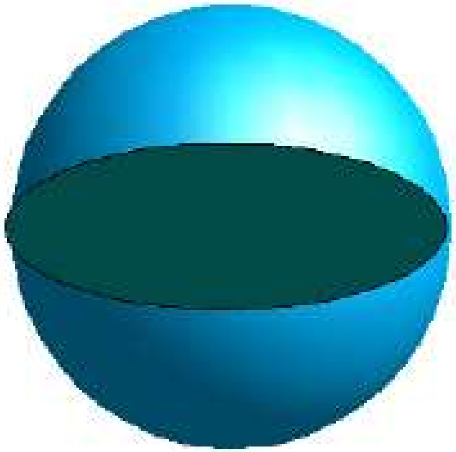


surface orientable   surface non orientable

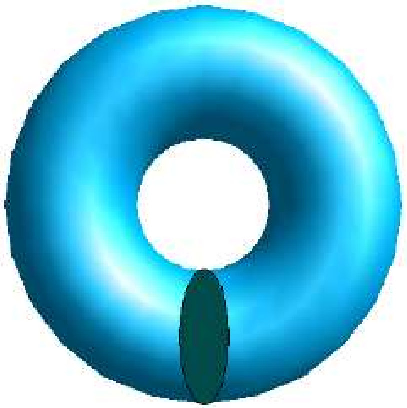
La sphère, le tore et toutes les autres combinaisons donnent des surfaces orientables. Toutes les surfaces dans $\mathbb{R}^2$ sont orientables.

Genre d'une surface

- On appelle genre d'une surface g(S), le nombre maximal de coupures que l'on puisse faire en maintenant la connexité de la surface



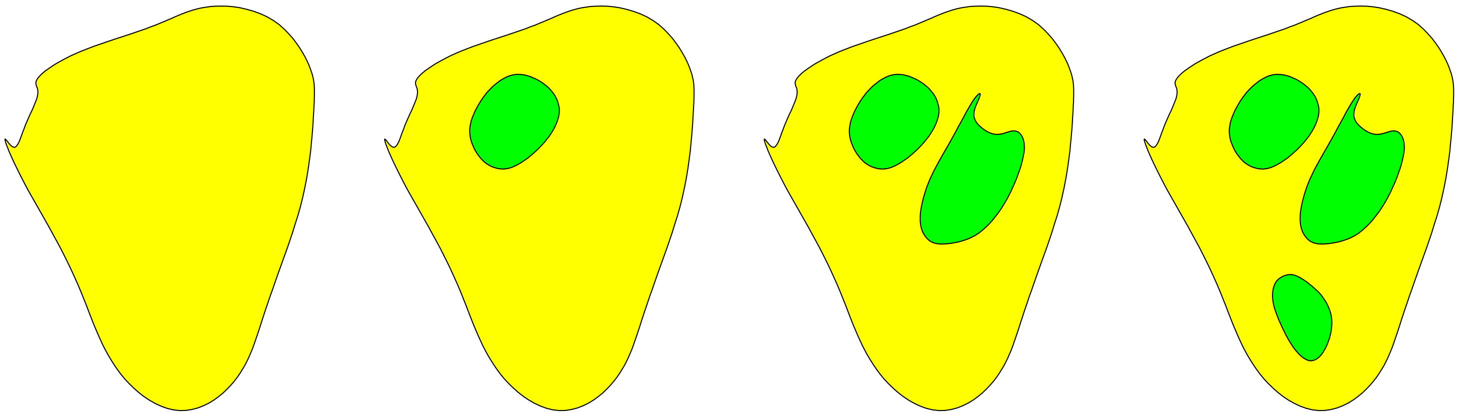
$g = 0$



$g = 1$

Genre dans $\mathbf{R}^2$

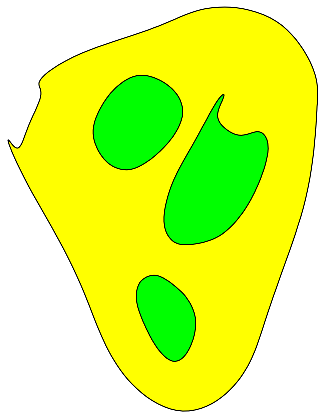
On appelle genre d'une surface g(S), le nombre maximal de coupures que l'on puisse faire en maintenant la connexité de la surface. Pour une surface de $\mathbf{R}^2$ cela correspond au nombre de trous.



$g = 0$ $g = 1$ $g = 2$ $g = 3$

Bord d’une surface

A moins d occuper tout l’espace de référence E, une surface de R^2 possède au moins un bord, c’est à dire une courbe la limitant. Par contre une surface sphérique ou une surface torique ne possède pas de bord.



Surface à 4 bords.

Théorème, définitions

- Théorème sur l'homéomorphisme : Pour que deux surfaces soient homéomophes, il faut et il suffit qu'elles soient toutes les deux orientables ou non orientables, qu'elles aient même genre et même nombre de bord.

- Propriétés topologiques : Préservation de la connexité Par exemple lorsqu'on bouche les trous d'une surface dans R^2, tous les points connexes issus de la surface initiale restent connexes. On ne fait que rajouter des points connexes.

- Homotopie : En terme de transformation d'images, on dit que celle ci est homotopique si l'ensemble d'arrivée est homéomorphe de l' ensemble de départ. Ainsi un objet troué doit rester avec le même nombre de trous. On en déduit immédiatement que le bouchage de trous n' est pas une transformation homotopique.

Propriétés topologiques des opérateurs ensembl

- L'union : Par union, ce qui était connexe dans chaque ensemble reste connexe dans l'union. Par contre, des surfaces ont pu se connecter et des trous disparaître. L'union préserve la connexité mais n'est pas homotopique.

- L'intersection : L'intersection peut détruire la connexité et ne pas préserver l'homotopie.

- Autres opérateurs Les autres opérateurs de bases ne possèdent aucune de ces propriétés