Morphologie mathématique

Géométrie discrète et images et Images

Luc Brun (d'après le cours de M. Coster)

Plan (1/2)

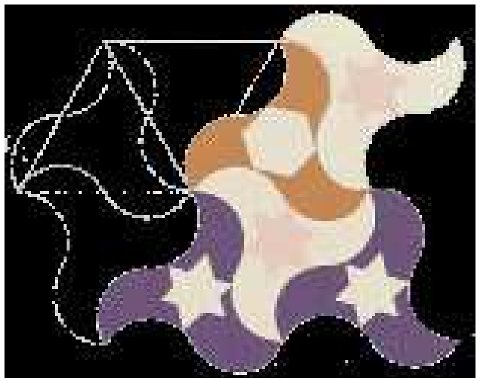
- Discrétisation de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Les méthodes de pavage
  - Le pavage régulier du plan
  - Récursivité du pavage
  - Maillage de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Caractéristiques topologiques des maillages
- L'espace discret
  - Voisinages
  - Chemins
  - Connexités
  - Paradoxes discrets
  - Frontière d'un ensemble dans l'espace discret
  - Ensemble convexe dans l'espace discret
  - La notion de distance dans l'espace discret

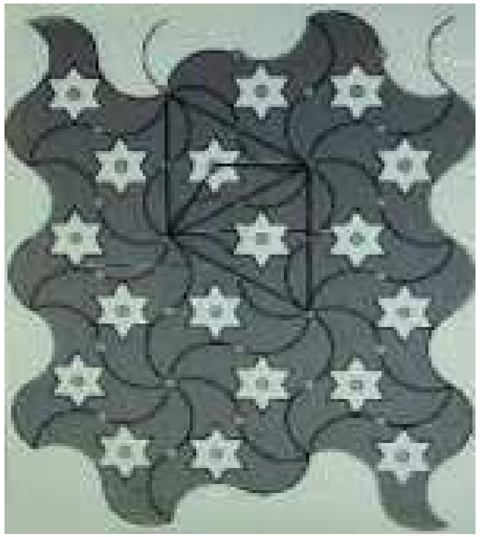
Plan (2/2)

- Topologie de Kovalevsky.
  - Topologie finie
  - Complexe cellulaire
  - Théorème : Complexe Cellulaire et Topologie
  - Étoile
  - Chemins, connexité
  - adhérence, intérieur
  - Frontière

Discrétisation de l'espace $\mathbb{R}^2$

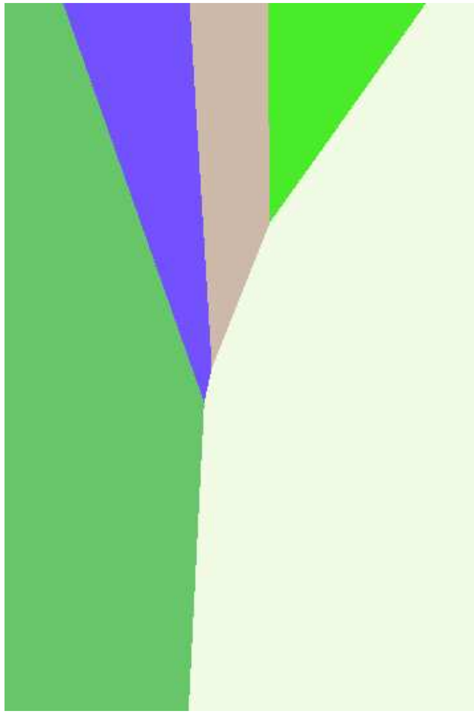
- Les méthodes de pavage
  Un pavage c'est le remplissage du plan avec un motif sans trous, sans chevauchements en utilisant des isométries.
  Une isométrie est une transformation qui conserve les longueurs, les angles et les figures. Les translations, les rotations, les symétries axiales et les symétries glissements sont les isométries du plan.



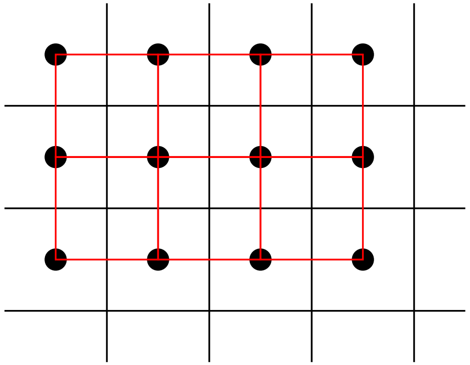


Pavage et capteurs

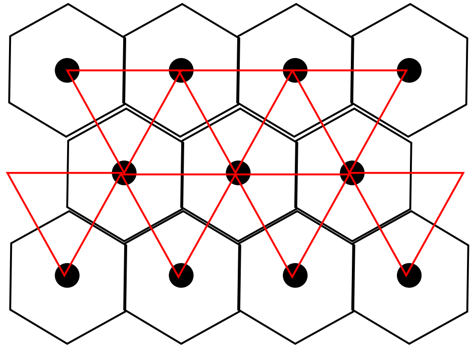
Associer à chaque capteur l'ensemble de ces points les plus proche.



Placement aléatoire



Placement en carré

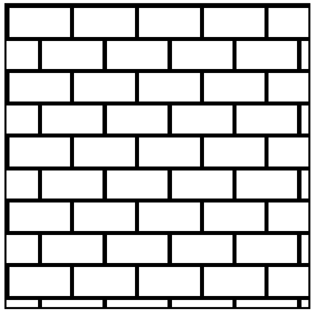


Placement en triangles

Pavages réguliers (1)

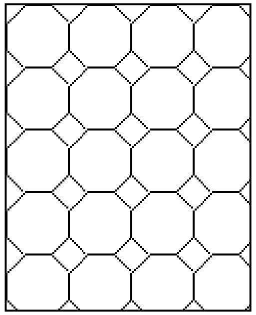
On impose les contraintes suivantes :

- polygone convexe,



- sommets en contacts avec d'autres sommets
- toutes les cellules doivent être identiques

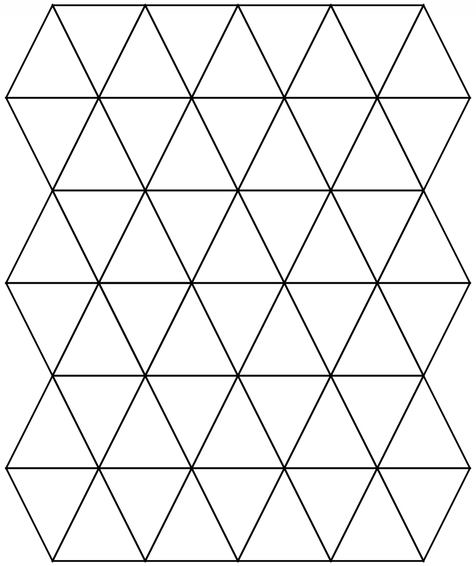
Pavage octogonal :



- Les cellules doivent être régulières (cotés de longueur identique, angles identiques)
- Chaque sommet en contact avec un nombre fixe de sommets des autres cellules.

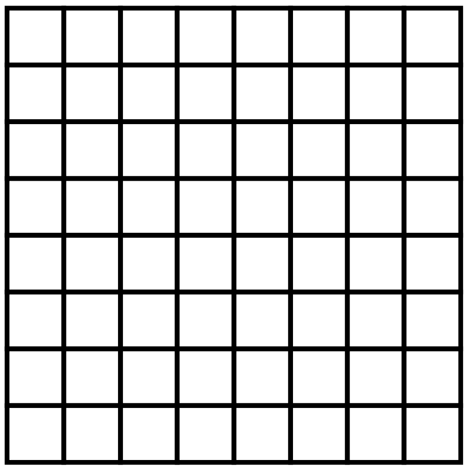
Pavages réguliers (2)

Trois solutions possibles dans $\mathbb{R}^2$:



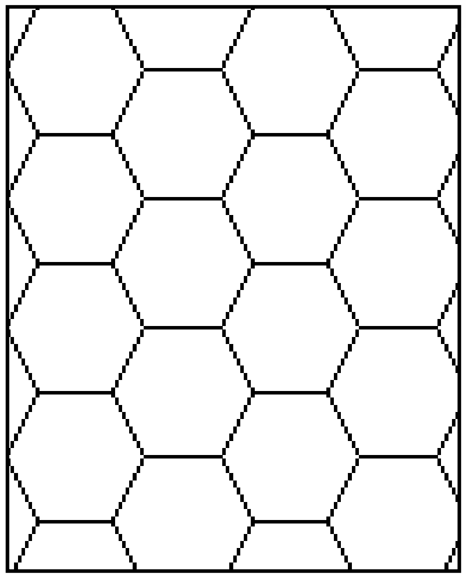
pavage triangulaire

(3)



pavage carré

(4)



pavage hexagonal

(6)

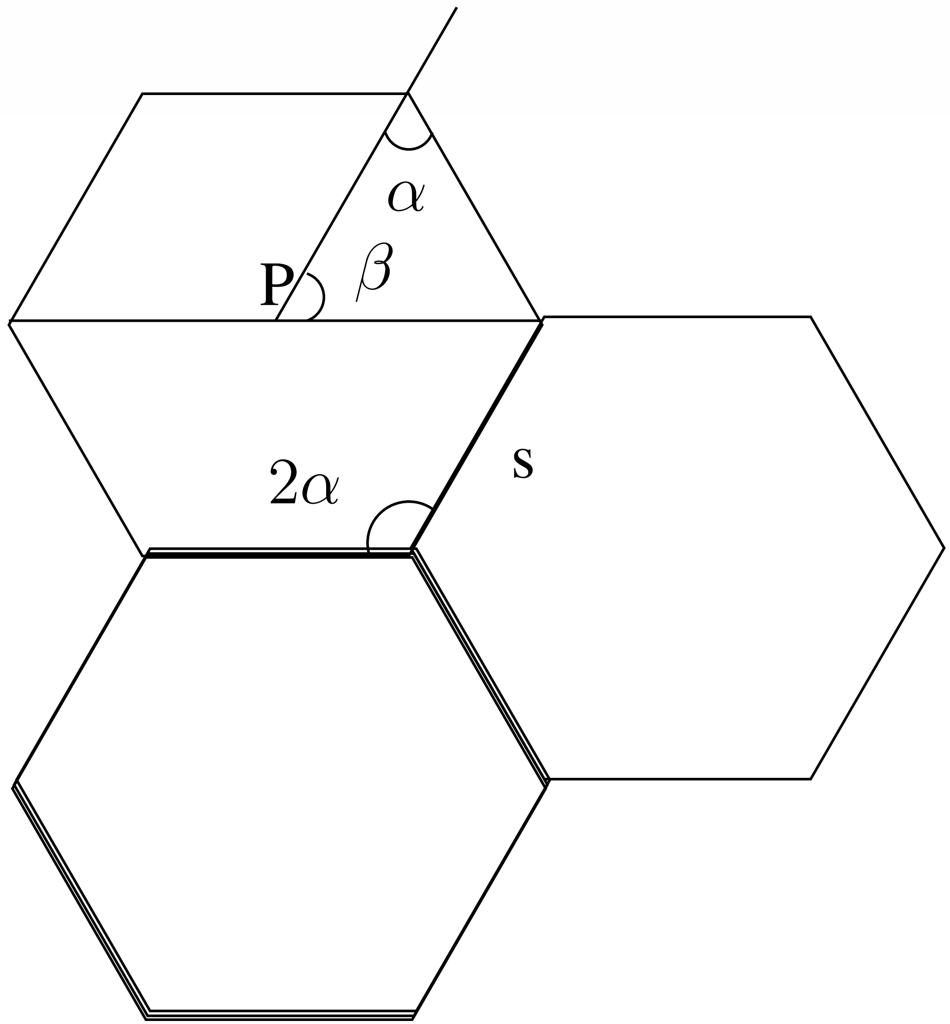
Pavages réguliers : Démonstration (1)

- n : nombre de cotés du polygone,
- s : nombre de polygones commun à un sommet
- Cotés égaux : $\beta = \frac{2\pi}{n}$
- Somme des angles d'un triangle : $\beta + 2\alpha = \pi$

$$\rightarrow \alpha = \pi \left(\frac{n-2}{2n} \right)$$

- Tour autour d'un sommet : $s.2\alpha = 2\pi$

$$\rightarrow s\alpha = \pi \Rightarrow s = \frac{2n}{n-2}$$



Pavages réguliers : Démonstration (2)

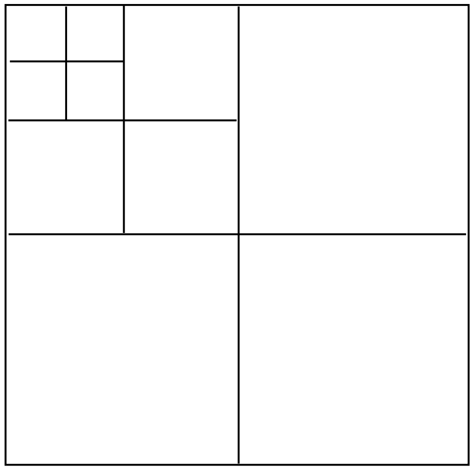
$$\rightarrow s\alpha = \pi \Rightarrow s = \frac{2n}{n-2}$$

Pour $n \geq 7, s < 3 \Rightarrow$ solutions pour $n < 7$.

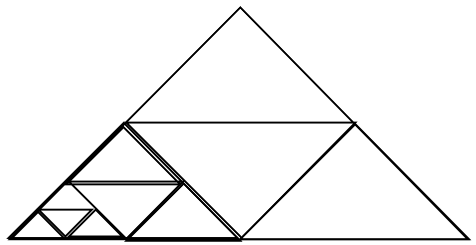
Polygone régulier	Nombre de cotés n	Nb polygones communs au sommet S
Triangle	3	6
Carré	4	4
Hexagone	6	3

Pavages récursifs

Un pavage récursif est un pavage où chaque polygone peut être décomposé en polygones de même nature et de taille inférieure.



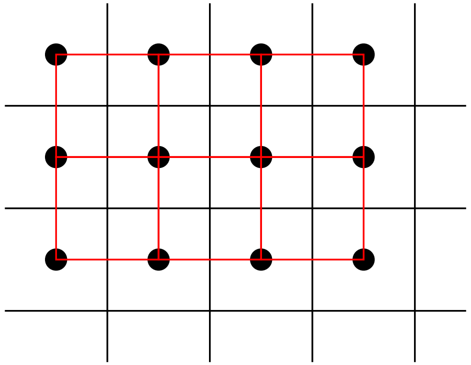
Récursif carré



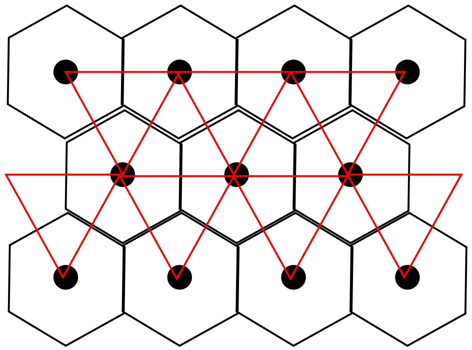
Récursif triangulaire

Pavage/Maillage

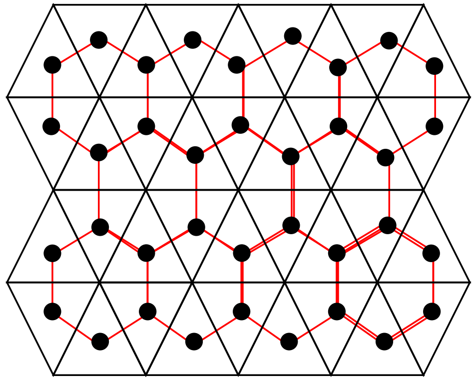
- Étant donné un Pavage, on construit un maillage en placant un point dans chaque polygone (disons au barycentre) et en connectant les points associés aux polygones partageant un coté.



Pavage Carré
Maillage Carré



Pavage hexagonal
Maillage triangulaire

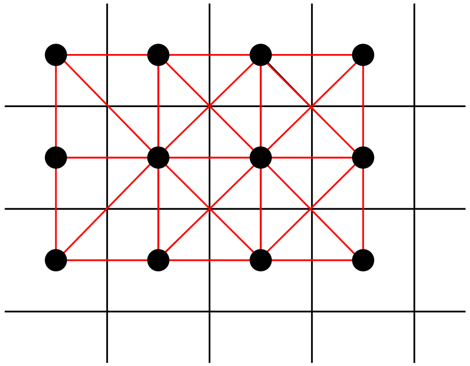


Pavage triangulaire
Maillage hexagonal

- Deux sommés du maillage sont dis voisins ou adjacents.
- Cas particulier de la notion de graphe duaux.

Pavage carré et Maillage 8 connexe

- Maillage défini pour un pavage carré.
- On connecte deux sommets du maillage associés à deux carrés si les carrés partagent un coté ou un sommet.



- Remarque : le maillage n'est plus planaire.

L'espace discret

- Discrétisation de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Les méthodes de pavage
  - Le pavage régulier du plan
  - Récursivité du pavage
  - Maillage de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Caractéristiques topologiques des maillages
- L'espace discret
  - Voisinages
  - Chemins
  - Connexités
  - Paradoxes discrets
  - Frontière d'un ensemble dans l'espace discret
  - Ensemble convexe dans l'espace discret
  - La notion de distance dans l'espace discret

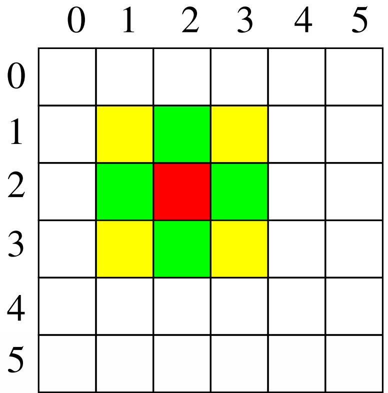
Voisinages 4 et 8 connexes

- Maillage 4 connexe

$$
\begin{aligned}
V_4(i,j) &= \{(i-1,j),(i,j),(i+1,j),(i,j+1)\} \\
V_4(i,j) &= \{(i',j') \in \mathbf{N}^2 \,[\, |i-i'| + |j-j'| = 1\}
\end{aligned}
$$

- Maillage 8 connexe

$$
\begin{aligned}
V_8(i,j) &= \{(i-1,j-1),(i-1,j),(i-1,j+1),(i,j-1),(i,j),(i,j+1) \\
&\quad (i+1,j-1),(i+1,j),(i+1,j+1)\} \\
V_8(i,j) &= \{(i',j') \in \mathbf{N}^2 \,[\, max\{|i-i'|,|j-j'|\} = 1\}
\end{aligned}
$$



- $V_4(\blacksquare) = \blacksquare + \blacksquare$
- $V_8(\blacksquare) = \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare$

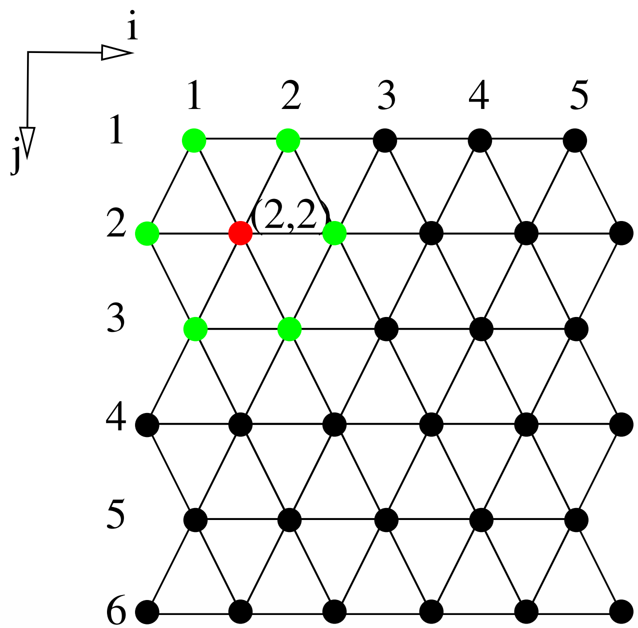
Voisinage triangulaire

- Les indices dépendent de la parité des lignes :
- Si j est pair :

$$V(i,j) = \{(i-1,j-1),(i,j-1),(i-1,j),(i+1,j),(i-1,j+1),(i,j+1)\}$$

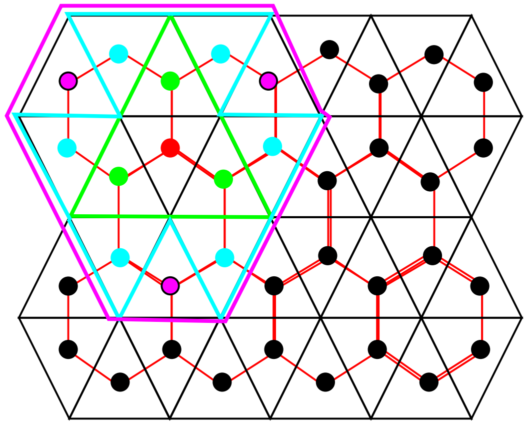
- Si j est impair :

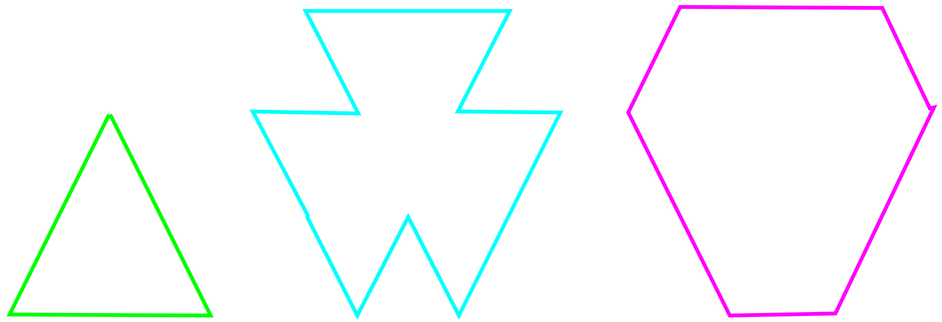
$$V(i,j) = \{(i,j-1),(i+1,j-1),(i-1,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1)\}$$



Voisinage Hexagonal

- V_3 : Cotés
- V_9 : Cotés $(\times 2)$
- V_{12} : Cotés + sommets





3 connexite 6 connexite 12 connexite

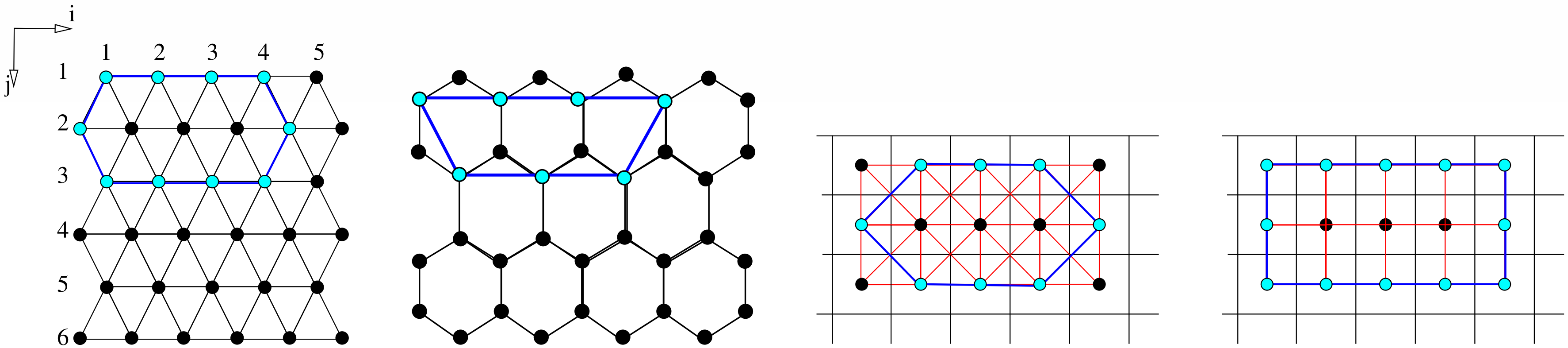
Chemins

- Un chemin est une suite de points d'un maillage tel que chaque point appartient au vosinage du point suivant :

$$P = P_1 \ldots, P_n, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}\, P_i \in V(P_{i+1})$$

- Si le dernier point est égal au premier le chemin est dit fermé.
- La notion de chemin est relative au maillage et à la connexité choisie. On parlera de
  - Chemins 4 ou 8 connexes pour un maillage carré,
  - Chemins 6 connexes pour un maillage triangulaire,,
  - Chemins 3,9 et 12 connexes pour un maillage hexagonal.

Exemples de chemins



Maille	triangulaire	hexagonale	carré	carré
Chemin	6 connexe	9 connexe	8 connexe	4 connexe

Ensembles connexes

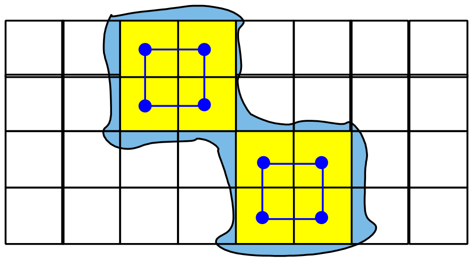
- Définition :
  un ensemble de sommets X du maillage sera dit x-connexe ssi pour tout couple de points (P, Q) de X il existe un x chemin contenu dans X et joignant P et Q

$$\forall (P, Q) \in X^2 \, \exists P = P_1 \ldots, P_n = Q \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} P_i \in X$$

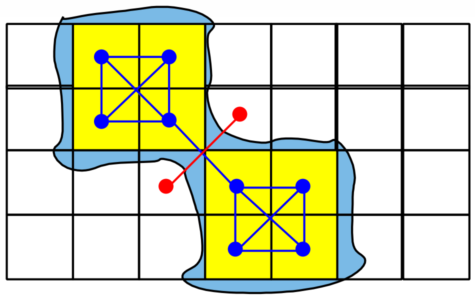
- La notion de connexité est donc relative au maillage et à la connexité définie sur celui-ci. On parlera d'ensembles $4, 6$ ou 8 connexes.

Paradoxes de la 4 et 8 connexité

4 connexité



8 connexité



■ non connexe Connexion du complémentaire

- Soit deux composantes connexes pour ■ et son complémentaire,
- soit une seule composante connexe à la fois pour ■ et son complémentaire.
- On convient d'utiliser une connexité pour l'objet et l'autre pour son complémentaire. On a à ce moment là :
  - Soit 2 composantes connexes de l'objet et une du complémentaire,
  - Soit une composante pour l'objet et 2 pour le complémentaire.

Frontière d'un ensemble discret

- En topologie : $\partial X = \overline{X} - \overset{\circ}{X}$
- Pb : on a pas vraimment de topologie. On dit donc :
  Un point appartient à la frontière d'un ensemble X p connexe ssi il possède un voisin appartenant à $\mathcal{C}_E(X)$.
- On a pas $\partial X = \partial \mathcal{C}_E(X)$. On parle donc de frontière intérieure et extérieure.
  - P appartient à la frontière intérieure de X ssi

$$P \in X \text{ et } \exists P' \in V_p(P) \cap \mathcal{C}_E(X)$$

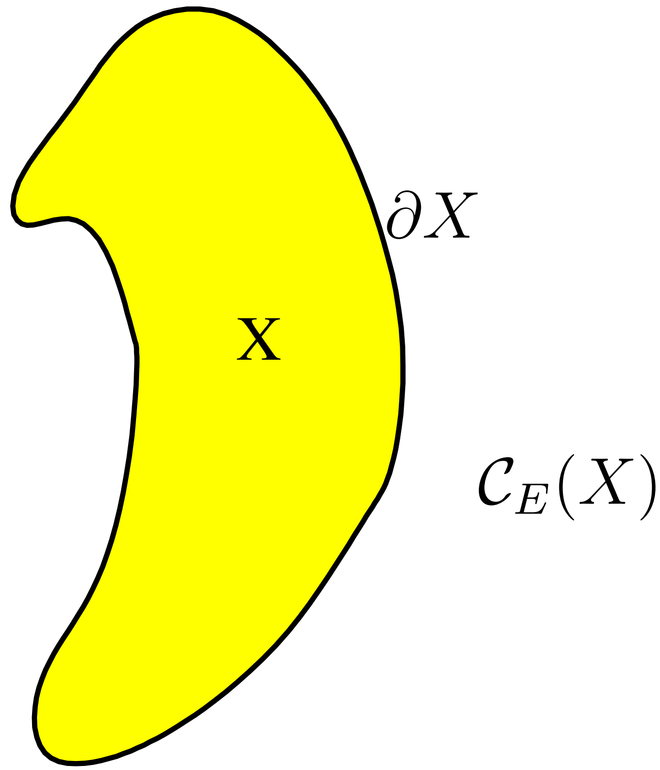
  - P appartient à la frontière extérieure de X ssi

$$P \in \mathcal{C}_E(X) \text{ et } \exists P' \in V_q(P) \cap X$$

où q est la connexité du complémentaire

Théorème de Jordan

Toute courbe fermée simple ∂X divise l'espace en deux domaines : un domaine intérieur X et un domaine extérieur $\mathcal{C}_E(X)$, chaque domaine étant connexe.

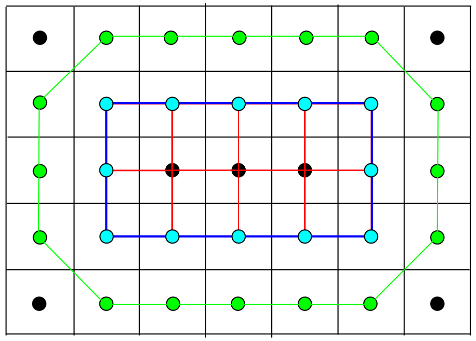


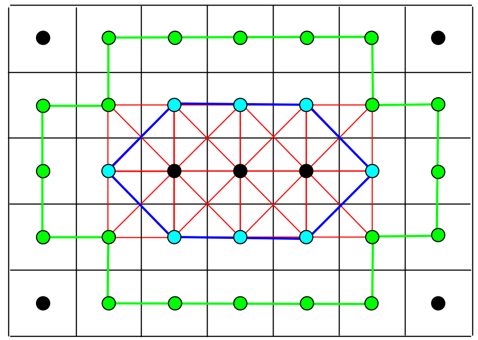
Jordan discret

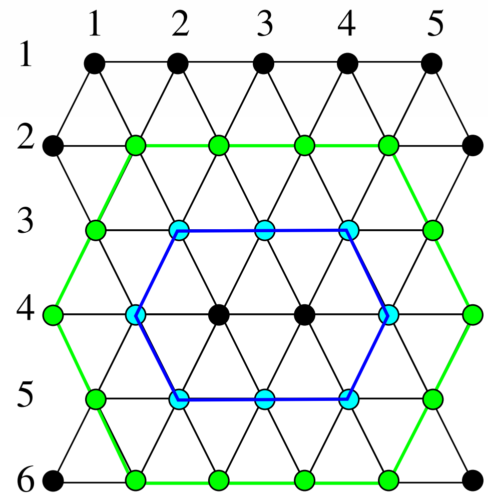
- Propriété :
  - Dans un maillage carré tout chemin 4 connexe (resp. 8 connexe) simple fermé sépare l'espace en deux composantes 8-connexes (resp. 4 connexes) : l'intérieur et l'extérieur.
  - Dans un maillage triangulaire tout chemin 6 connexe simple fermé sépare l'espace en deux composantes 6-connexes : l'intérieur et l'extérieur.
- Donc :

Objet	frontière intérieure	frontière extérieure
4 connexe	4 connexe	8 connexe
8 connexe	8 connexe	4 connexe
6 connexe	6 connexe	6 connexe

Frontières : Exemples

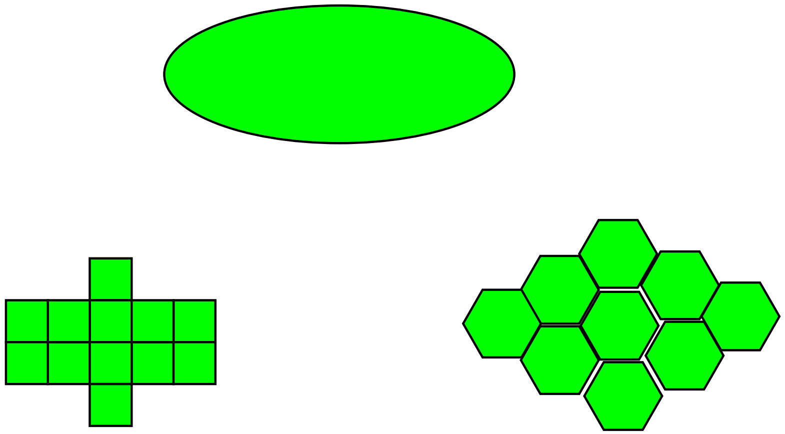






Frontière intérieure	4 connexe	8 connexe	6 connexe
Frontière extérieure	8 connexe	4 connexe	6 connexe

Convexité et discret

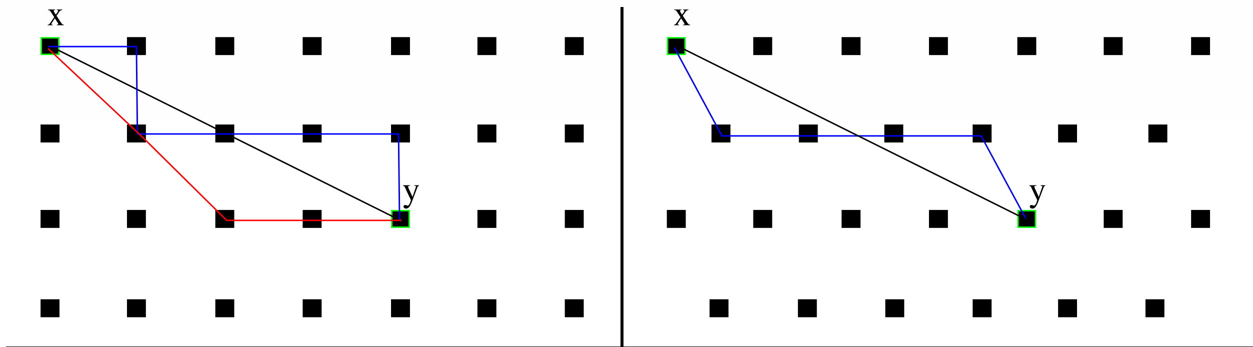


- La discrétisation peut entrainé une perte de convexité au sens de R^2.

Discret et distances

- Dans R^2 la distance entre deux points est la longueur du segment de droite joignant les deux points.
- Dans $\mathbb{Z}^2$ la distance entre deux points de $\mathbb{Z}^2$ est la longueur minimale des chemins joignant ces deux points.
- Longueur d'un chemin : Nombre d'arêtes=Nb de points (-1 si ouvert)
- Maillage carré
  - Maillage 4 connexe : arêtes verticales et horizontales
  - Maillage 8 connexe : arêtes verticales et horizontales plus les arêtes à $\pm 45°$.
- Maillage triangulaire
  - Maillage 6 connexe : arêtes à $60°$ les unes des autres.

Distances : Exemples



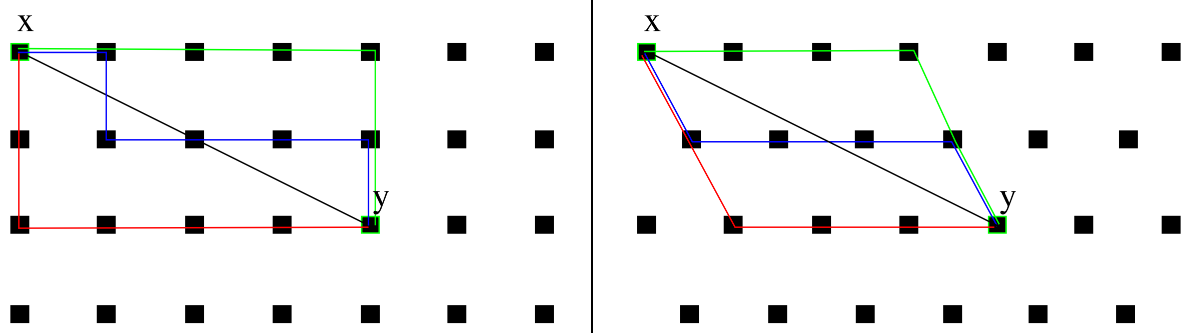
maillage carré | maillage triangulaire

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
d(x,y) & = & 2\sqrt{5} \approx 4.46 \\
d_4(x,y) & = & 6 \\
d_8(x,y) & = & 4 \\
d'_8(x,y) & = & 2\sqrt{(2)} + 2 \approx 4.82 \\
d_6(x,y) & = & 5
\end{array}
\right.
$$

Unicité de la distance discrète

- Le plus court chemin n'est généralement pas unique (propriété des graphes).

d_4	d_6



maillage carré	maillage triangulaire

Topologie de Kovalevsky.

- Discrétisation de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Les méthodes de pavage
  - Le pavage régulier du plan
  - Récursivité du pavage
  - Maillage de l'espace $\mathbf{R}^2$
  - Caractéristiques topologiques des maillages
- L'espace discret
- Topologie de Kovalevsky.
  - Topologie finie
  - Complexe cellulaire
  - Théorème : Complexe Cellulaire et Topologie
  - Étoile
  - Chemins, connexité
  - adhérence, intérieur
  - Frontière

Topologie fini

- Topologie Finie :
  - Un espace topologique fini $(E, \mathcal{T})$ possède un nombre fini d'ouverts.
  - Remarque : dans un espace topologique fini toute intersection ou union d'ouverts est forcément finie. Donc toute intersection ou union d'ouverts est un ouvert.
- Voisinage :
  L'intersection de tous les ouverts contenant $e \in E$ est un ouvert. C'est le plus petit voisinage contenant e (notons le $V(e)$)

Complexe cellulaire

Un complexe cellulaire $C = (F, B, dim)$ est défini par un ensemble F et :

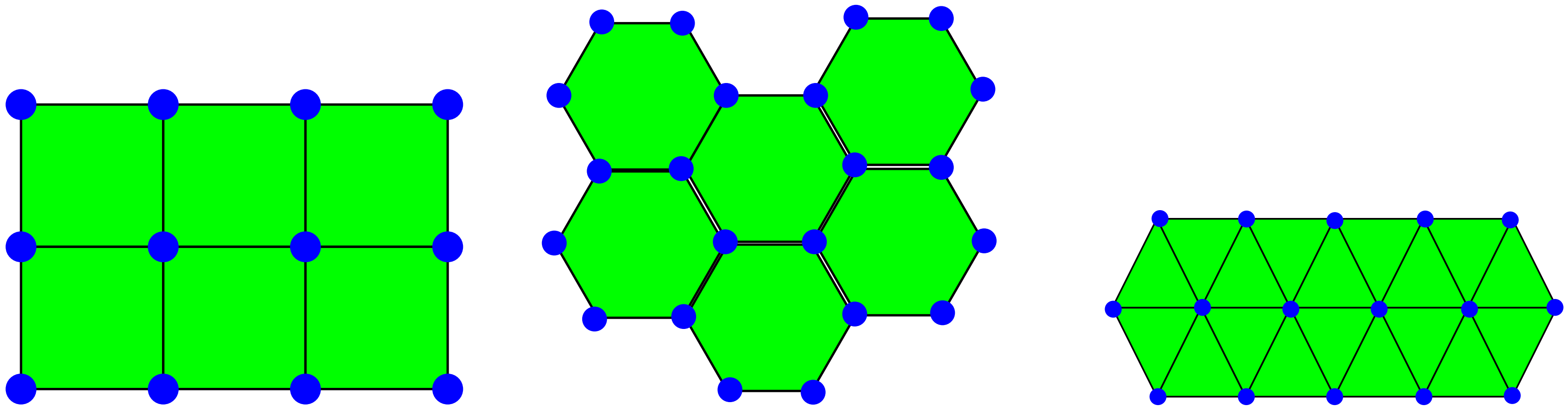
- Une relation d'ordre partiel B inclue dans $F \times F$ et appellée la relation de bord (ou de face).

  $(e_1, e_2) \in B$ se dit e_1 est un bord (ou une face) de e_2.

- Une fonction dim de F dans $\mathbf{N}$ telle que :

  si $(e_1, e_2) \in B$ alors $dim(e_1) < dim(e_2)$.

- Idée : On tient compte de tous les éléments d'un pavage.

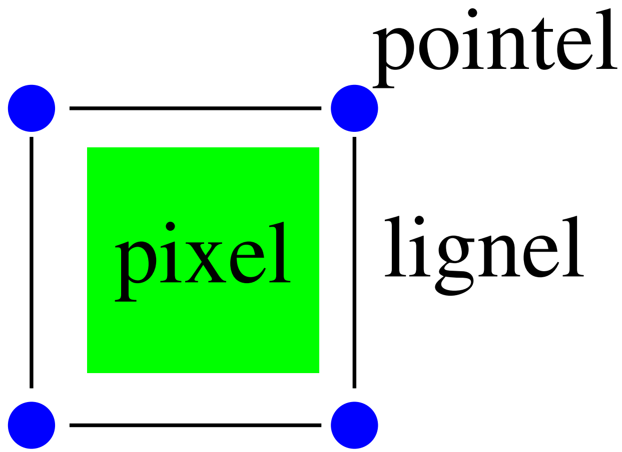


Pavage carré   Pavage hexagonal   Pavage triangulaire

dim(■)=2 ;
dim(|)=1 ;
dim(●)=0 ;

Notations (Jean Françon)

- Les éléments de dimension 2 sont appelés les *pixels*
- Les éléments de dimension 1 sont appelés les *lignels*
- Les éléments de dimension 0 sont appelés les *pointels*



Théorème (1)

- Tout espace topologique fini T_0 séparé $(E, \mathcal{T})$ est un complexe cellulaire.
  - Idée de la preuve :
  - On considère $C = (E, B, dim)$
  - $(e_1, e_2) \in B$ ssi :

$$e_2 \neq e_1, e_2 \in V(e_1) \text{ et } e_1 \notin V(e_2)$$

  - La fonction dim est définie par

$$dim(e) = (\max_{e' \in E} |V(e')|) - |V(e)|$$

Théorème (2)

- Pour tout complexe cellulaire fini $C = (E, B, dim)$, On peut définir une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec C.
  - Idée de la preuve :

$$S \subset E \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall e \in S, \forall e', (e, e') \in B\, e' \in S$$

  Un ensemble ouvert contient tous les éléments qu'il borde.
  - ■ı■ est ouvert
  - – • – ne l'est pas.

Étoile d'un élément

Soit $C = (E, B, dim)$ un complexe cellulaire, l'étoile ouverte d'un élément $e \in E$ (noté $St(e, C)$) est l'ensemble des éléments bordés par e.

$$e' \in St(e, C) \Leftrightarrow (e, e') \in B$$

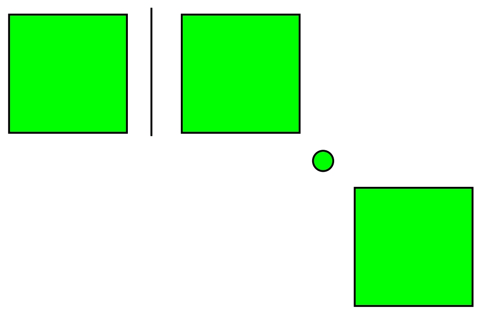
- On a $St(e, C) = V(e)$ (plus petit voisinage contenant le point)
- En maillage carré :
  - $St(\blacksquare, C) = \blacksquare$
  - $St(|, C) = \blacksquare | \blacksquare$
  - $St(\bullet, C) = \begin{array}{ccc} \blacksquare & | & \blacksquare \\ - & \bullet & - \\ \blacksquare & | & \blacksquare \end{array}$

Chemins, Connexité

- Chemins :
  Une suite $P = e_1, \ldots, e_n$ d'éléments d'un complexe cellulaire $C = (E, B, dim)$ est appelé un chemin ssi :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \qquad \begin{array}{ll} & (e_i, e_{i+1}) \in B \text{ ou } (e_{i+1}, e_i) \in B \\ \Leftrightarrow & e_i \in St(e_{i+1}, C) \text{ ou } e_{i+1} \in St(e_i, C) \end{array}$$

- P sera dit fermé ssi $e_1 = e_n$.
- Connexité :
  Un ensemble X d'un complexe cellulaire est dit connexe ssi tout couple d'éléments e, e' dans X peut être connecté par un chemin inclus dans X.



ensemble connexe

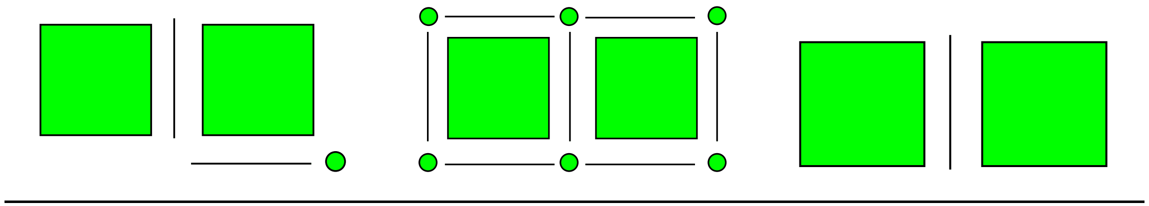
Adhérence, Intérieur

- Adhérence :
  L'adhérence de X est l'ensemble des éléments $e \in E$ dont l'étoile intersecte X

$$e \in \overline{X} \Leftrightarrow St(e, C) \cap X \neq \emptyset$$

- Intérieur :
  L'intérieur de X est l'ensemble des éléments dont l'étoile est incluse dans X.

$$e \in \overset{\circ}{X} \Leftrightarrow St(e, C) \subset X$$



X $\qquad$ $\overline{X}$ $\qquad$ $\overset{\circ}{X}$

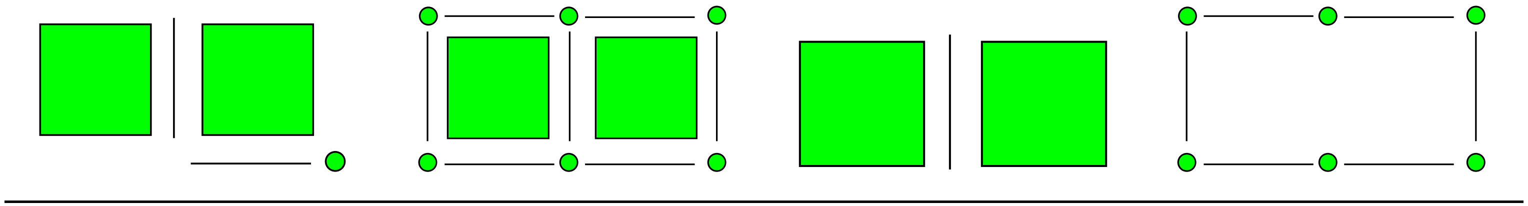
Frontière

- e est appelé un point frontière ssi son étoile intersecte à la fois X et $\mathcal{C}_E(X)$.

$$e \in \partial X \Leftrightarrow St(e, C) \cap X \neq \emptyset \text{ et } St(e, C) \cap \mathcal{C}_E(X) \neq \emptyset$$

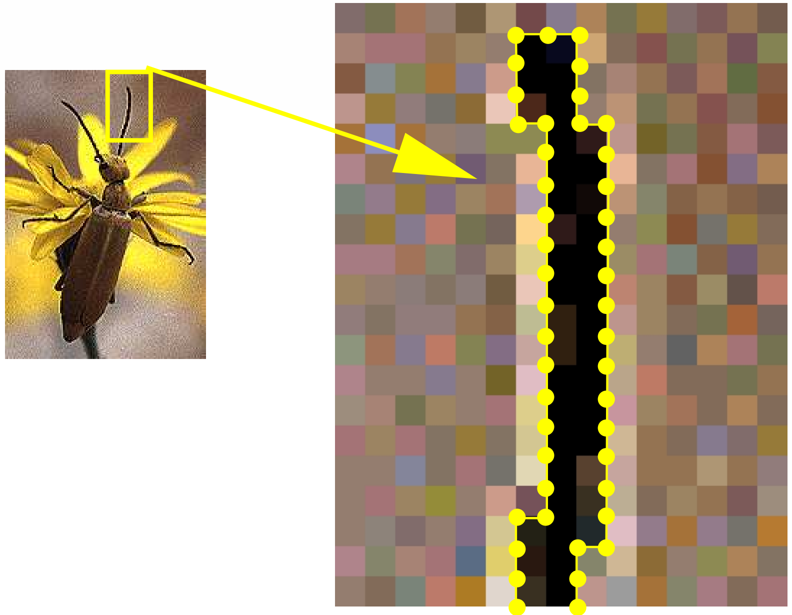
- Remarque : on a bien :

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathcal{C}_E(X)} = \overline{X} - \mathring{X}$$



X $\qquad$ $\overline{X}$ $\qquad$ $\mathring{X}$ $\qquad$ ∂X

Frontières : Exemple



- Définition des régions au pixel près.
- Stockage des lignels d'une image $n \times m$ par un tableau de taille $(n+1) \times (m+1)$.