Morphologie mathématique

Erosions et Dilations

Luc Brun (d'après le cours de M. Coster)

Plan (1/2)

- Élément Structurant
  - Définition,
  - Exemple,
  - Transposé
- Érosions et dilatations ensemblistes
  - Transformation en tout ou rien
  - L'érosion
  - L'érosion exemples
  - Transformation bi colorée
  - Érosion et soustraction de Minkowski
  - Dilatation
  - Dilatation : Exemples
  - Dilatation et addition de Minkowski
- Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblistes.
  - Dualité,
  - Extensivité
  - Croissance,
  - Composition
  - Union, Intersection
  - Composition
  - Continuité supérieure de l'érosion
- Calculs de Distances
  - Distance d'un point à un ensemble
  - Distance et courone,
  - Distance par érosion : Algorithme
  - Exemples
  - Distance Externe
  - Extension à la distance de deux ens

Plan (2/2)

- Érosion et dilatation de fonctions
  - Nature de l'élément structurant,
  - Exemple d'élément structurant,
  - Erosion d'une fonction
  - Érosion avec élément structurant volumique
  - Exemples d'érosion
  - Dilatation d'une fonction
  - Dilatation avec élément structurant volumique
  - Exemple de dilatation
  - Résidus morphologiques
- Gradients morphologiques
  - Gradients morphologiques ensemblistes
  - Gradient morphologique interne fonctionnel
  - Gradient morphologique externe fonctionnel
  - Gradient morphologique symétrique fonctionnel
  - Laplacien Morphologique
  - Laplacien Morphologique : Exemple

L'idée de la morphologie mathématique

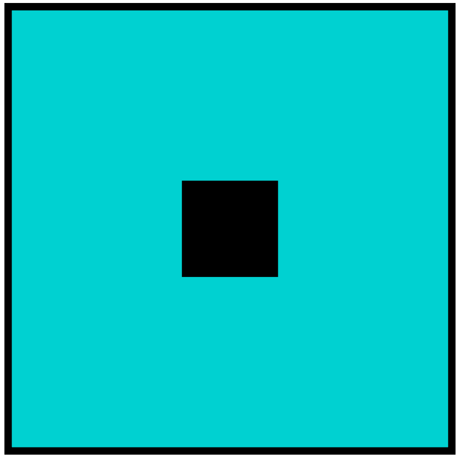
- Rappel :

  L'idée de base de la morphologie mathématique est de comparer l' ensemble à analyser avec un ensemble de géométrie connue appelé élément structurant.

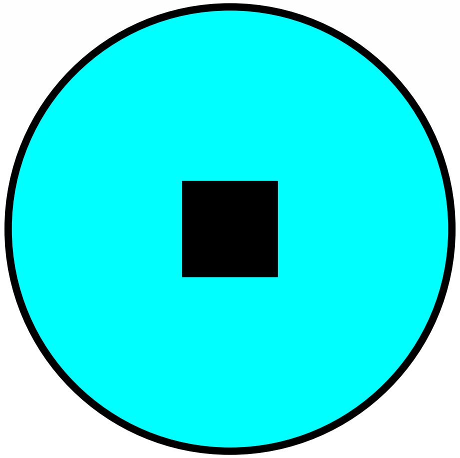
Élément structurant : Définition

- Un élément structurant B est un ensemble qui possède les caractéristiques suivantes :
  - Il possède une forme (géométrie connue),
  - Cette forme à une taille λ,
  - Cet élément est repéré par son origine o. L'origine o appartient généralement à l'élément structurant mais ce n'est pas une obligation.

Élément structurant : Exemples



Carré



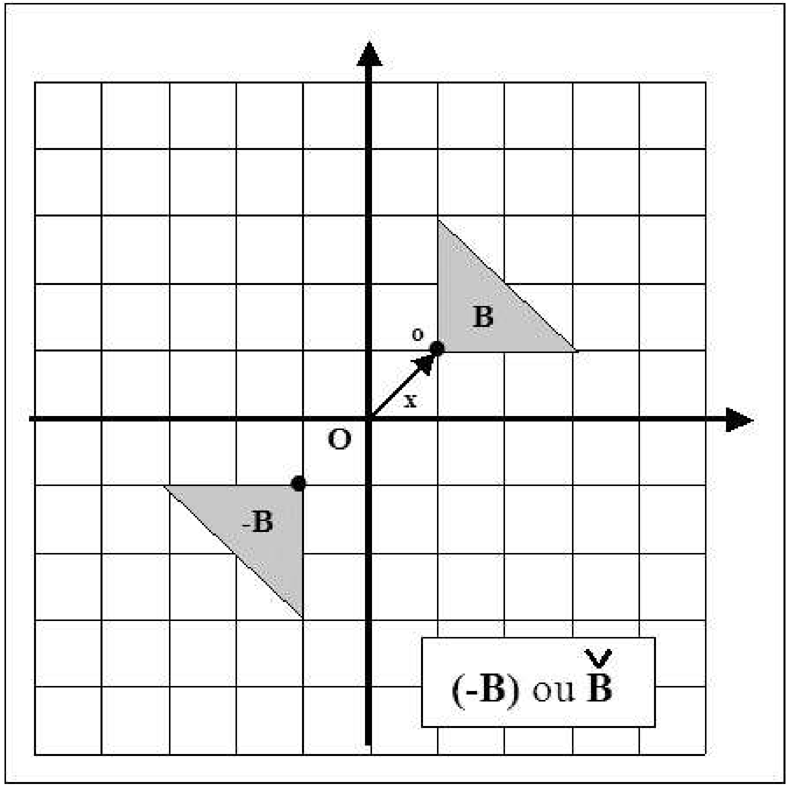
Cercle

Segment

Paire de points

Élément structurant transposé

- Définition :
  Le transposé d'un élément structurant B (noté $\breve{B}$ ou $-B$) est l'élement structurant symétrique de B par rapport à l'origine O.



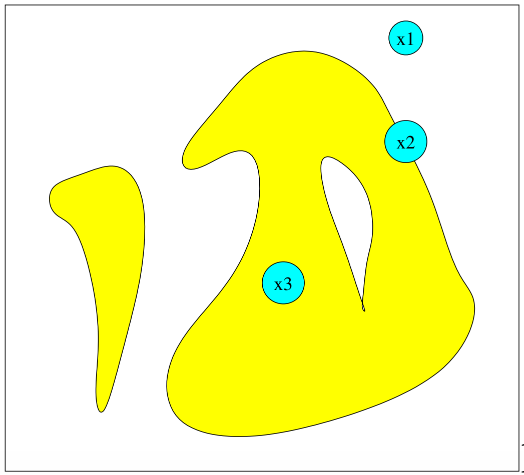
Érosions et dilatations ensemblistes

- Élément Structurant p. 5
  - Définition,
  - Exemple,
  - Transposé
- Érosions et dilatations ensemblistes
  - Transformation en tout ou rien
  - L'érosion
  - L'érosion exemples
  - Transformation bi colorée
  - Érosion et soustraction de Minkowski
  - Dilatation
  - Dilatation : Exemples
  - Dilatation et addition de Minkowski
- Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblistes.
  - Dualité,
  - Extensivité
  - Croissance,
  - Composition
  - Union, Intersection
  - Composition
  - Continuité supérieure de l'érosion
- Calculs de Distances
  - Distance d'un point à un ensemble
  - Distance et courone,
  - Distance par érosion : Algorithme
  - Exemples
  - Distance Externe
  - Extension à la distance de deux ens

Transformations en tout ou rien

- Une transformation en tout ou rien de X par B dans E ,est définie en déplaçant B sur l'ensemble des points $x \in E$. Pour chaque position, on pose une question relative à l'union, l'intersection ou l'inclusion de B avec X . Chaque réponse positive fournit un nouvel ensemble qui donne l'image transformée.
- Les transformations en tout ou rien les plus simples sont :
  - L'érosion qui est une transformation, en tout ou rien, relative à l'inclusion.
  - La dilatation qui est relative à un test d'intersection.

  Il existe des transformations en tout ou rien plus complexes utilisant des éléments structurants bi-colorés.

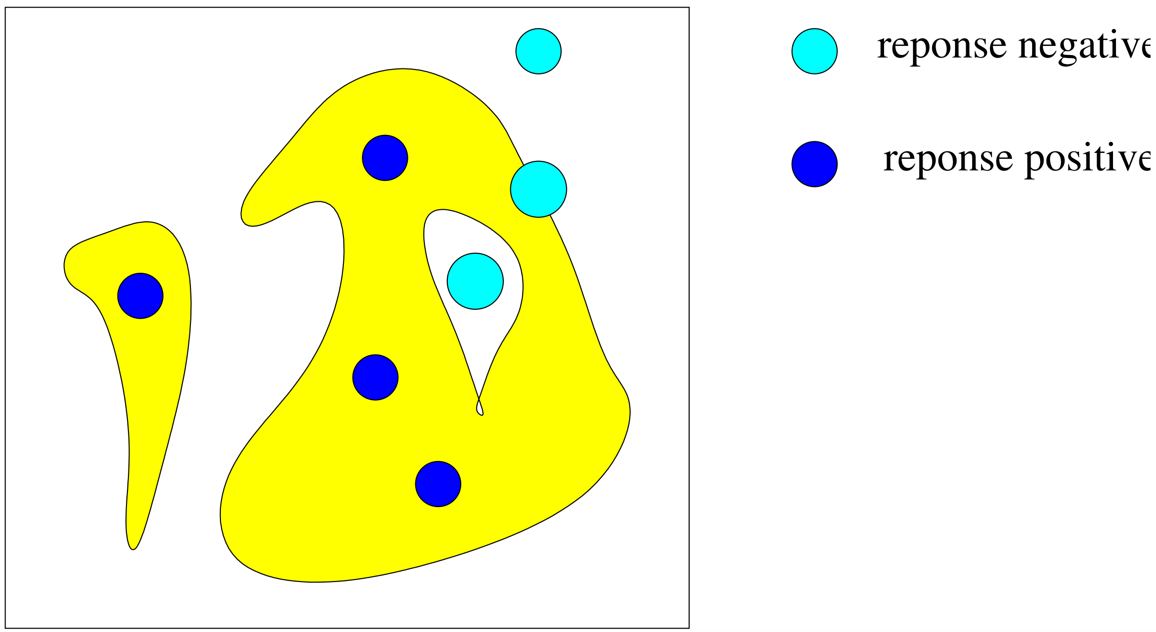


r

L'érosion

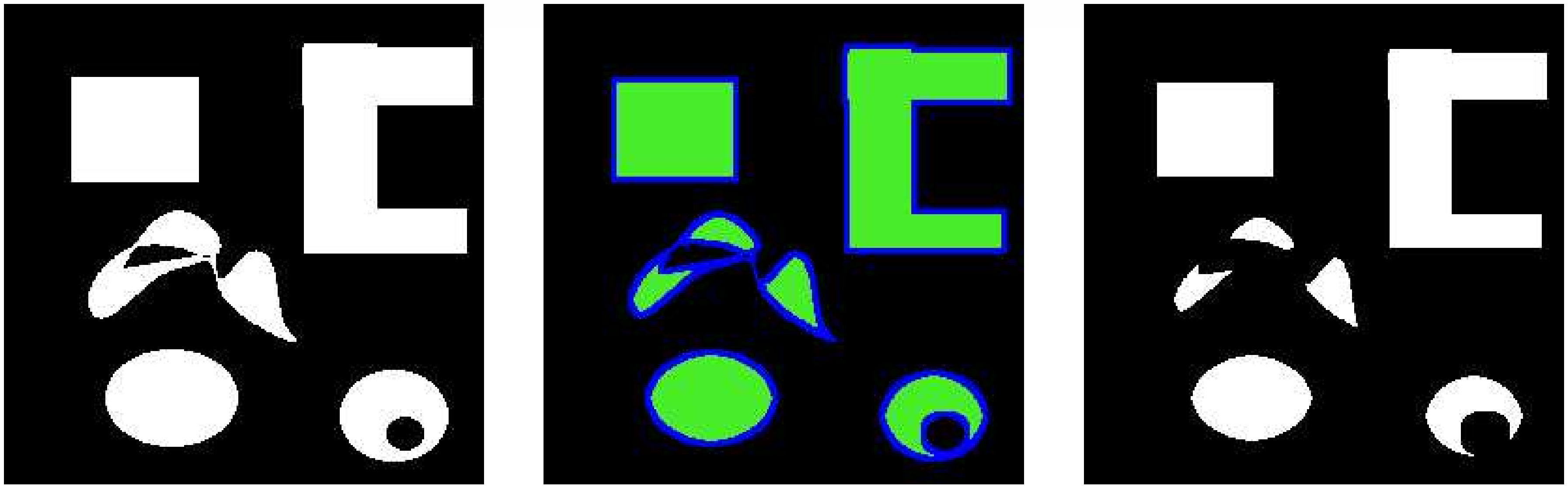
- Définition :
  L'élément structurant B, repéré par son centre, est déplacé pour occuper successivement toutes les positions de l'espace E. Pour chaque position, on pose la question : B est-il complètement inclus dans X ?
- Les réponses positives forment l ensemble érodé.

$$\mathcal{E}_B(X) = \{x \in E, B_x \subset X\}$$



Erosion : Exemple (1)

- $B =$■ (rayon 3)

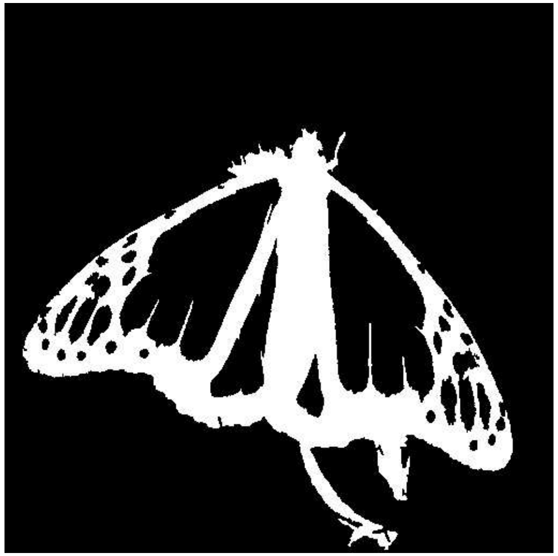


X — X(■+■) et $\mathcal{E}_B(X)$(■) — $\mathcal{E}_B(X)$

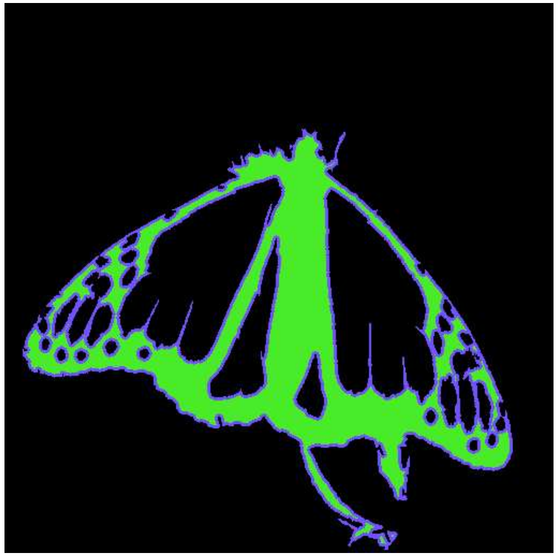
- Propriétés qualitative
  - La taille des objets décroît
  - Un objet avec des concavités ou des trous peut être divisés en plusieurs
  - Les petits objets et les détails disparaissent

Erosion : Exemple (2)

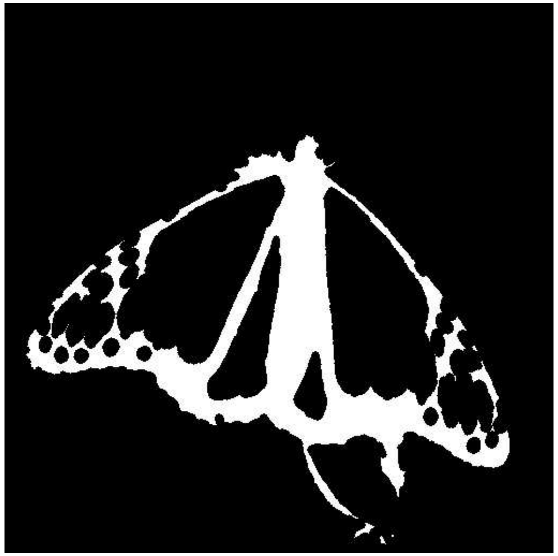
- $B = \bullet$ (rayon 5)



X

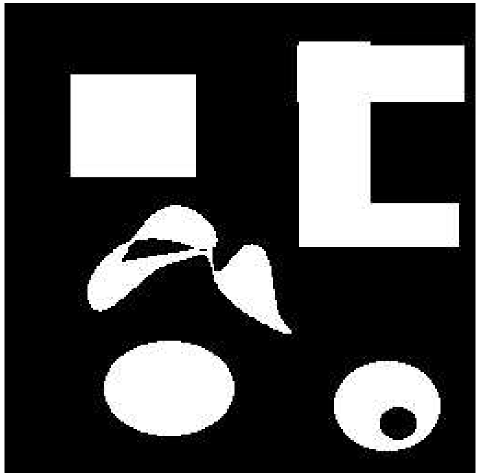


X(■+■) et $\mathcal{E}_B(X)$(■)



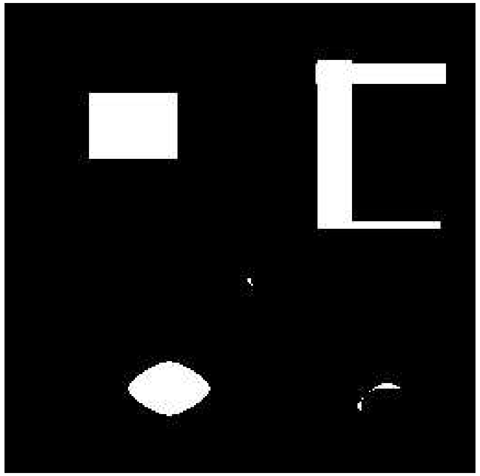
$\mathcal{E}_B(X)$

Érosion avec des éléments de taille croissante

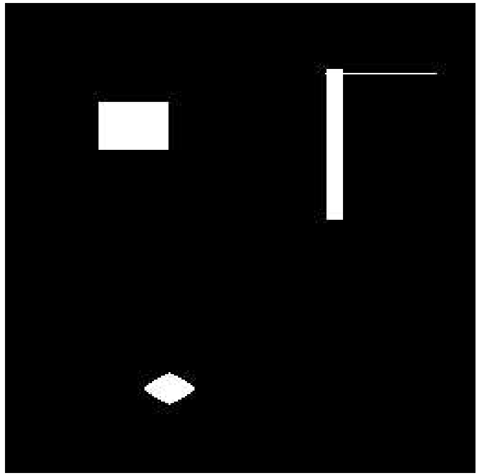


X

$\mathcal{E}_{5B}(X)$



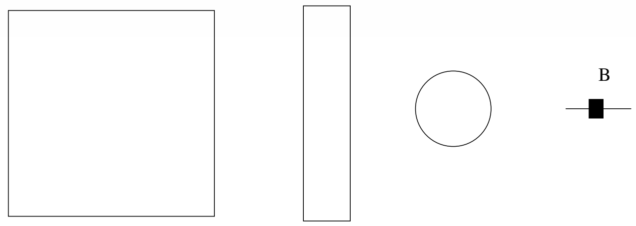
$\mathcal{E}_{10B}(X)$



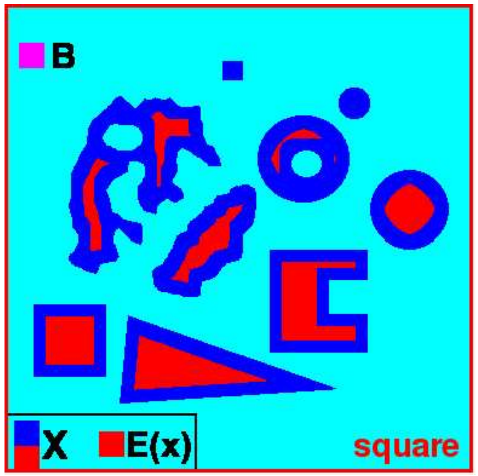
$\mathcal{E}_{15B}(X)$

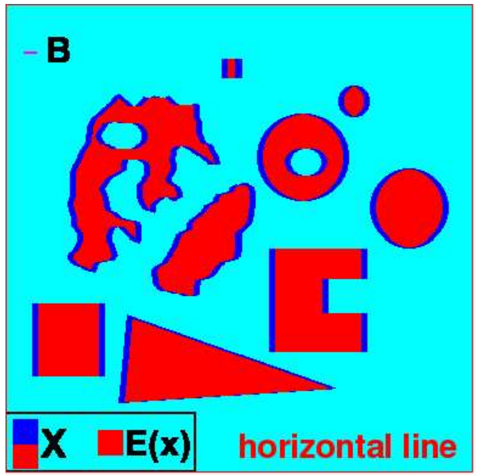
Érosion et élements structurants

- Quid de $\mathcal{E}_B(X)$?



- Erosion avec différents éléments





Transformation bi colorée (Hit-and-Miss)

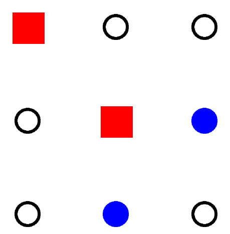
- L'élément structurant est décomposé en deux ensembles correspondant à deux labels : $B = B^0 \cup B^1$.
- On dira que x appartient à la Hit and Miss transformé de X par B ssi :

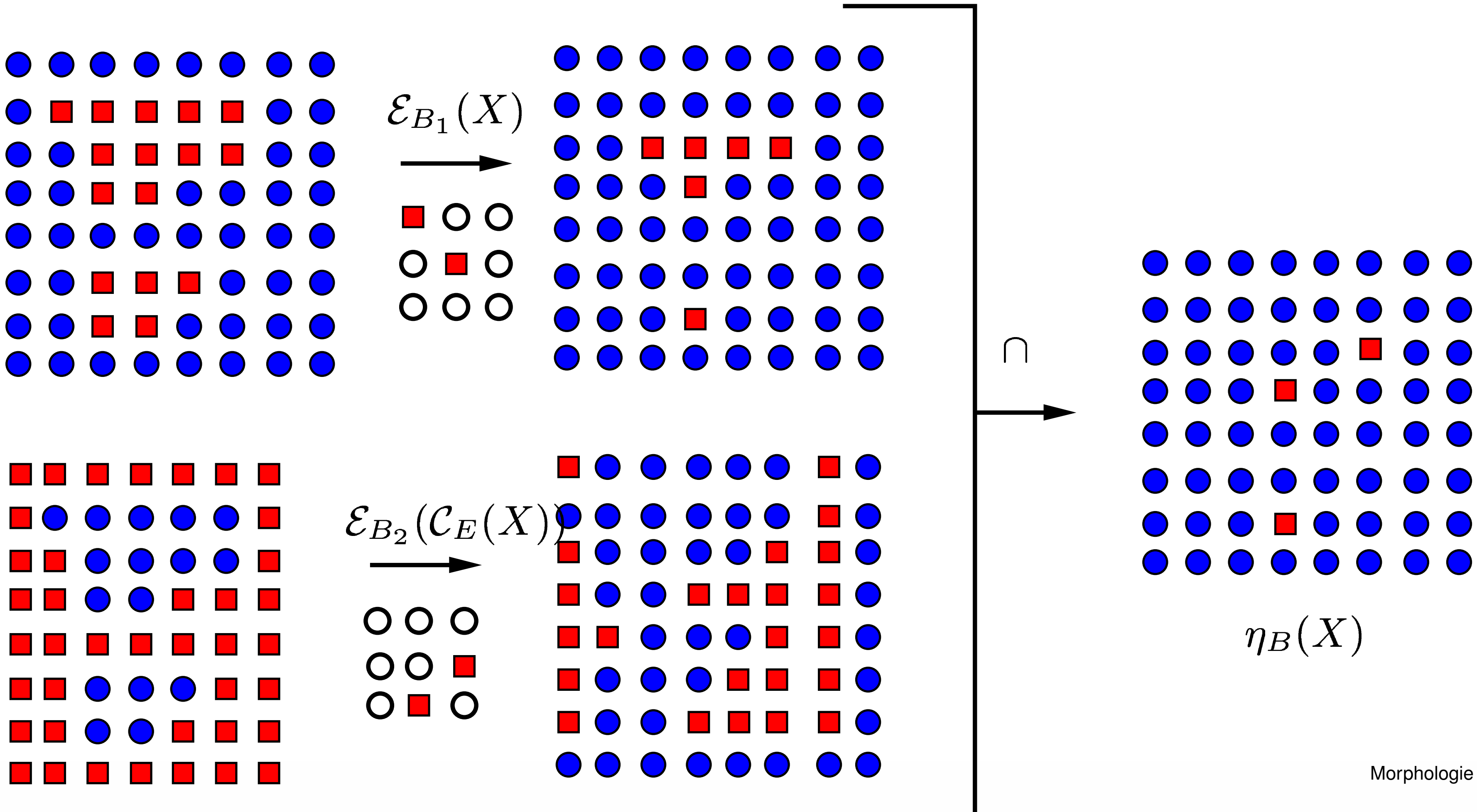
$$B_x^0 \subset \mathcal{C}_E(X) \text{ et } B_x^1 \subset X$$

- Une transformation bi-coloré peut s'exprimer comme l'intersection de deux érosions sur X et $\mathcal{C}_E(X)$.

$$\eta_B(X) = \eta_{B^0,B^1}(X) = \mathcal{E}_{B^1}(X) \cap \mathcal{E}_{B^2}(\mathcal{C}_E(X))$$

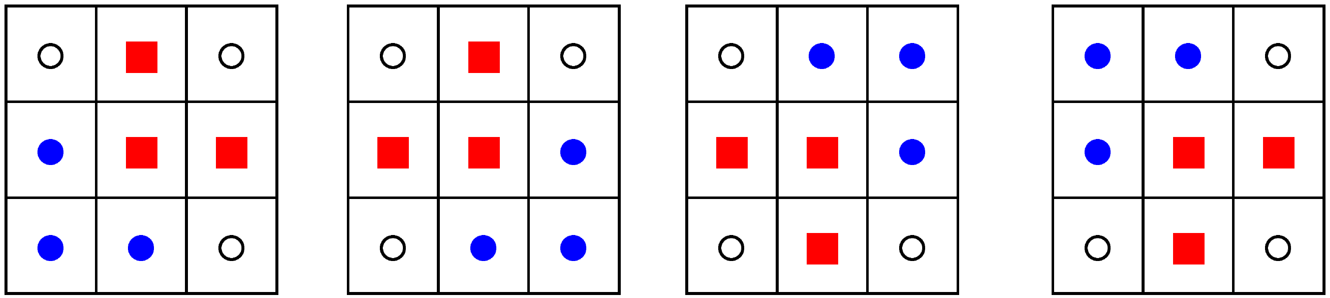
Illustration

- $B =$ 



Exemple d'applications

- Détecteurs de coins



bas gauche   bas droite   haut droite   haut gauche

Érosion et soustraction de Minkowski

- L'érosion ensembliste est identique à la soustraction de Minkowski par l'élément transposé.

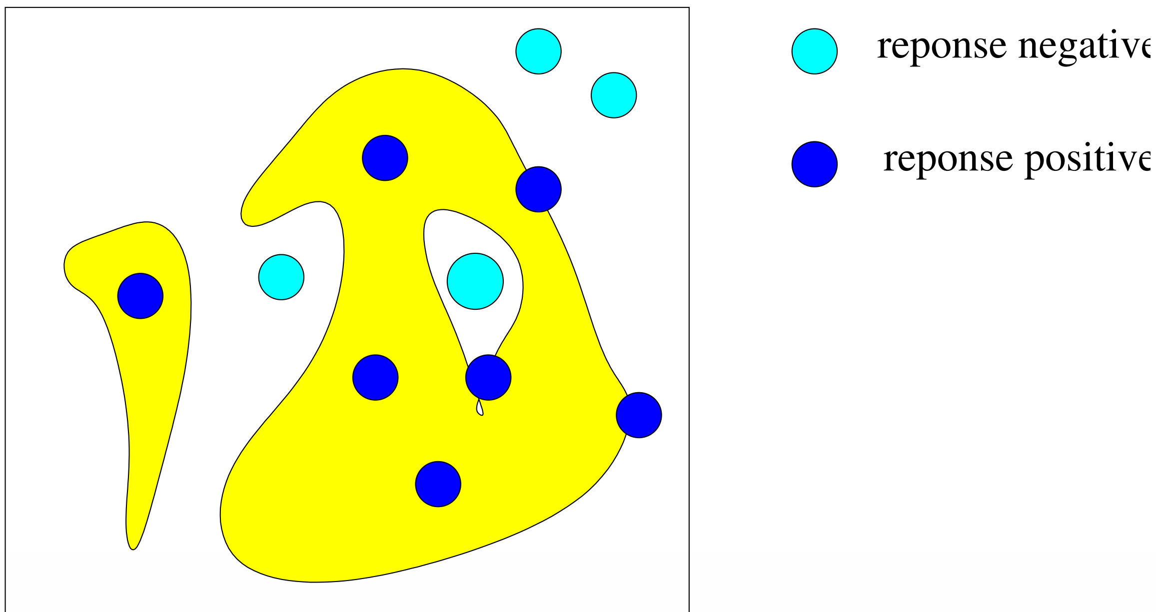
$$\mathcal{E}_B(X) = X \ominus \breve{B} = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

- Démonstration : Soit $z \in \bigcap_{b \in B} X_{-b} \ldots$(a faire)

Dilatation morphologique pour les ensembles

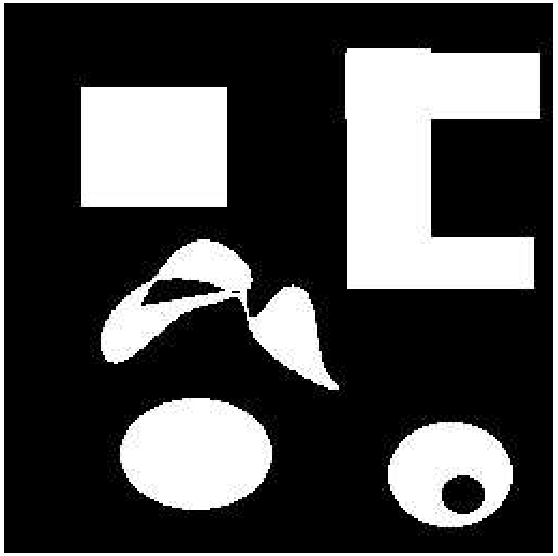
- La dilatation est une transformation en tout ou rien basée sur l'intersection.
- Définition :
  L'élément structurant B, repéré par son centre, est déplacé pour occuper successivement toutes les positions de l'espace E. Pour chaque position, on pose la question : B intersecte t' il X ?
- Les réponses positives forment l'ensemble dilaté.

$$\delta_B(X) = \{x \in E, B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

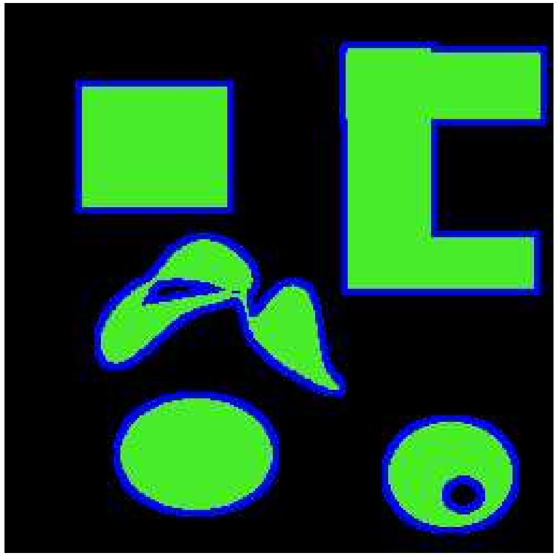


Dilatation : Exemple (1)

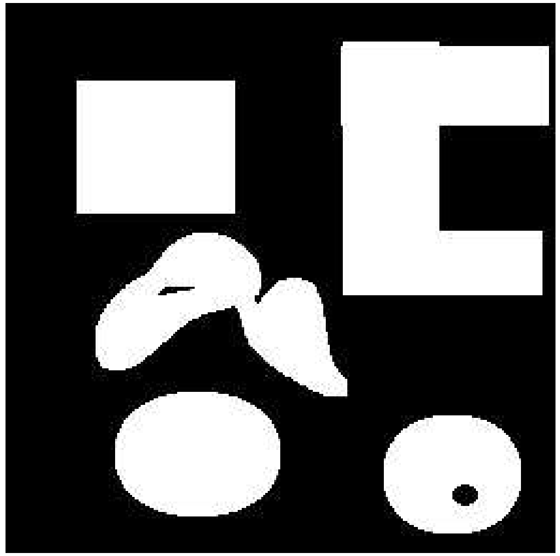
- $B =$ ■ (rayon 3)



X



$\delta_B(X)$(■+■) et X(■)

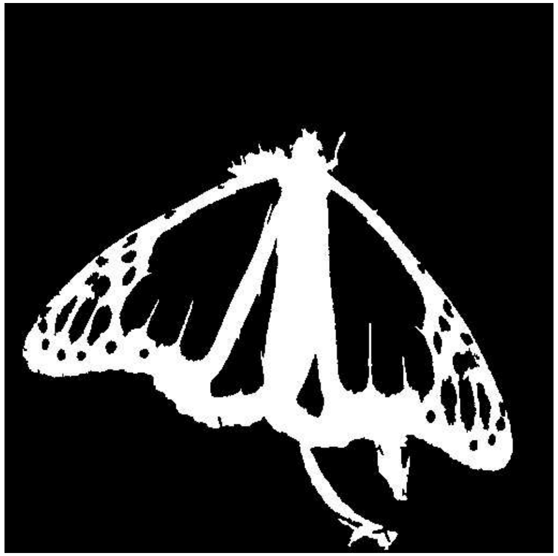


$\delta_B(X)$

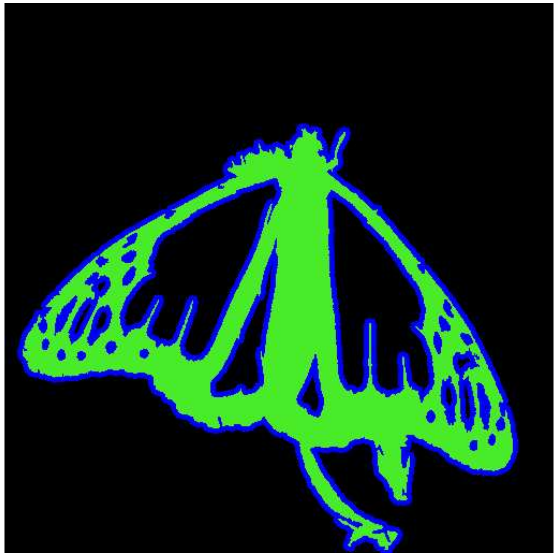
- Propriétés qualitative
  - La taille des objets augmente
  - Les trous et les concavités peuvent être bouchés
  - Les objets voisins peuvent se connecter
  - Des petits détails disparaissent

Dilatation : Exemple (2)

- $B = \bullet$ (rayon 5)



X



$\delta_B(X)$(■+■) et$X$(■)

$\delta_B(X)$

Dilatation avec des éléments de taille croissante

- $B = \blacksquare$

X $\delta_{5B}(X)$ $\delta_{10B}(X)$ $\delta_{15B}(X)$

Dilatation et addition de Minkowski

- L'addition ensembliste est identique à l'addition de Minkowski par l'élément transposé.

$$\delta_B(X) = X \oplus \breve{B} = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$$

- Démonstration : Soit $z \in \bigcup_{b \in B} X_{-b}$...(a faire)

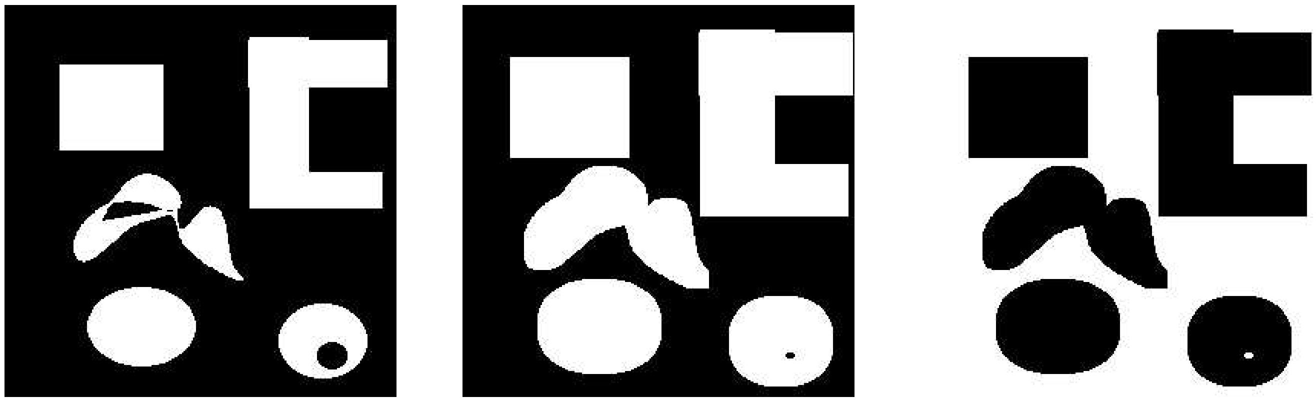
Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblis

- Élément Structurant p. 5
  - Définition,
  - Exemple,
  - Transposé
- Érosions et dilatations ensemblistes
  - Transformation en tout ou rien
  - L'érosion
  - L'érosion exemples
  - Transformation bi colorée
  - Érosion et soustraction de Minkowski
  - Dilatation
  - Dilatation : Exemples
  - Dilatation et addition de Minkowski
- Propriétés de l'érosion et la dilatation
  - Dualité,
  - Extensivité
  - Croissance,
  - Composition
  - Union, Intersection
  - Composition
  - Continuité supérieure de l'érosion
- Calculs de Distances
  - Distance d'un point à un ensemble
  - Distance et courone,
  - Distance par érosion : Algorithme
  - Exemples
  - Distance Externe
  - Extension à la distance de deux ens

Dualité

Les 2 transformations ne sont pas indépendantes. On obtient le même résultat en érodant X ou en dilatant le complémentaire de X et en prenant le complémentaire du résultat.
On dit que L'érosion et la dilatation sont 2 opérations duales vis-à-vis de la complémentation :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_B(X)) & = & \mathcal{C}_E(\delta_B(\mathcal{C}_E(X))) \\ \delta_B(X)) & = & \mathcal{C}_E(\mathcal{E}_B(\mathcal{C}_E(X))) \end{cases}$$



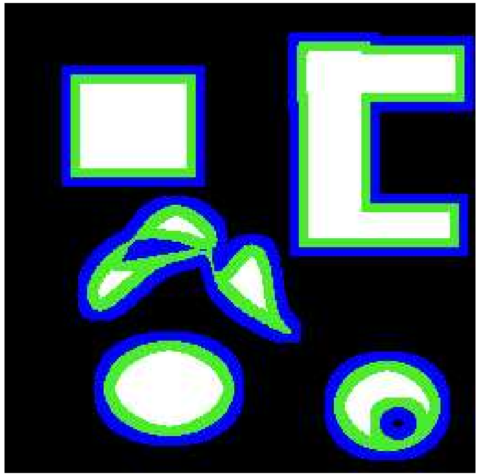
X $\qquad$ $\delta_{5B}(X)$ $\qquad$ $\mathcal{E}_{5B}(\mathcal{C}_E(X))$

Extensivité

- La dilatation est une transformation extensive alors que l'érosion est anti extensive.

$$\mathcal{E}_B(X) \subset X \subset \delta_B(X)$$

- $\mathcal{E}_B(X) = \square$
- $X = \square +$
- $\delta_B(X) = \square +$ +



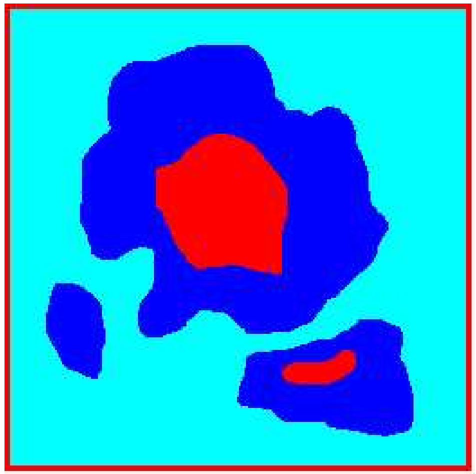
Croissance

- La dilatation et l'érosion sont des opérateurs croissants

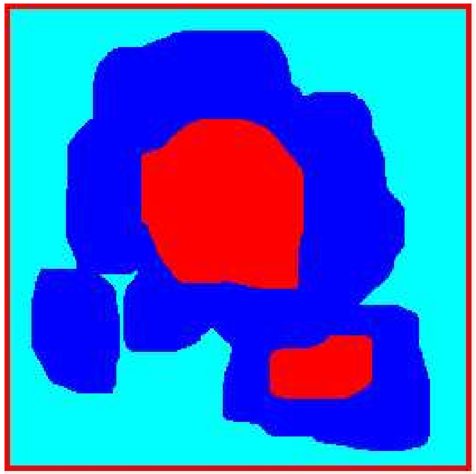
$$\begin{cases} X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y) \\ X \subset Y \Rightarrow \mathcal{E}_B(X) \subset \mathcal{E}_B(Y) \end{cases}$$

- L'érosion est **décroissante** par rapport à l'élément structurant.

$$B \subset B' \Rightarrow \mathcal{E}_{B'}(X) \subset \mathcal{E}_B(X)$$



$\blacksquare \subset \blacksquare$



$\delta_B(\blacksquare) \subset \delta_B(\blacksquare)$

Composition

- La dilatation avec un élément structurant de taille n est égale à n dilatations avec un élément structurant de taille 1 (idem pour l érosion)

$$\delta_{nB}(X) = \underbrace{\delta_{1B} \circ \cdots \circ \delta_{1B}}_{nfois}(X)$$

  nB homothétie de B d'un facteur n.
- ⚠ Utile pour l'implémentation hardware lorsque la taille du voisinage est fixe (processeur voisinage 3*3) : un plus grand voisinage peut être obtenu par cascade des opérations

Union, Intersection

- La dilatation commute avec l'union :

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

- L'érosion commute avec l'intersection :

$$\mathcal{E}_B(X \cap Y) = \mathcal{E}_B(X) \cap \mathcal{E}_B(Y)$$

- De plus :

$$\begin{cases} \delta_{B_1 \cup B_2}(X) & = & \delta_{B_1}(X) \cup \delta_{B_2}(X) \\ \mathcal{E}_{B_1 \cup B_2}(X) & = & \delta_{B_1}(X) \cap \mathcal{E}_{B_2}(X) \end{cases}$$

- Mais :

$$\begin{cases} \delta_{B_1 \cap B_2}(X) & \subset & \delta_{B_1}(X) \cap \delta_{B_2}(X) \\ \mathcal{E}_{B_1 \cap B_2}(X) & \supset & \mathcal{E}_{B_1}(X) \cup \mathcal{E}_{B_2}(X) \\ \mathcal{E}_B(X \cup Y) & \supset & \mathcal{E}_B(X) \cup \mathcal{E}_B(X) \end{cases}$$

Composition

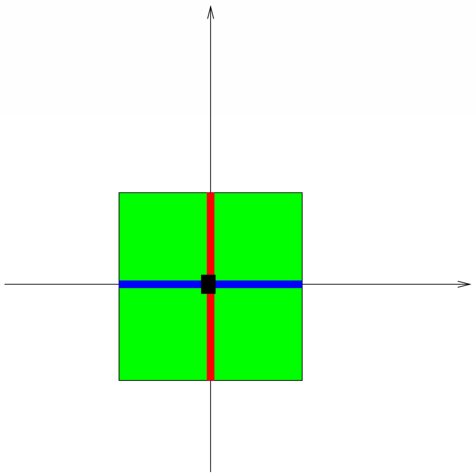
- Soit B_1 et B_2 deux éléments symétriques par rapport à l'origine. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta_{\delta_{B_1}(B_2)}(X) & = & \delta_{B_1}(\delta_{B_2}(X)) \\ \mathcal{E}_{\mathcal{E}_{B_1}(B_2)}(X) & = & \mathcal{E}_{B_1}(\mathcal{E}_{B_2}(X)) \end{array}\right.$$

- Démonstration (pour la dilatation) :

$$\begin{array}{rcll} \delta_{\delta_{B_1}(B_2)}(X) & = & X \oplus (B_1 \oplus \breve{B}_2)\breve{\ } & \\ & = & X \oplus (B_1 \oplus B_2)\breve{\ } & \\ & = & X \oplus (B_1 \oplus B_2) & \\ & = & (X \oplus B_1) \oplus B_2 & \text{⚠ : point clé} \\ & = & (X \oplus \breve{B}_1) \oplus \breve{B}_2 & \\ & = & \delta_{B_1}(\delta_{B_2}(X)) & \end{array}$$

Composition : Illustration



- B_1 : 
- B_2 : 
- $\delta_{B_1}(B_2)$: 

Passage d'une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$ à une complexité en $\mathcal{O}(2n)$.

Continuité

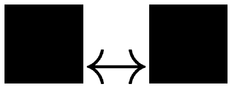
- L'érosion est semi continue supérieurement.

$$\forall B \ \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathcal{E}_B(X_n) \subset \mathcal{E}_B(\lim_{n \to +\infty} X_n)$$

- Démonstration : (a faire)
- La dilatation est un opérateur continu.

Continuité supérieure de l'érosion : Exemple

- Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de 2 carrés séparés par une distance $\frac{1}{n}$.
- $B =$



X_n

$X = \lim_{n \to +\infty} X_n$

$\overline{\lim}_{n \to +\infty} \mathcal{E}_B(X_n)$

$\subset$

$\mathcal{E}_B(X)$

Récapitulatif

- La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits et fait grossir les objets.
- L'érosion fait disparaître les petits objets, les petits ithmes et amincit les objets restants.
- La dilatation et l'érosion ne sont pas des transformations topologiques.
- Si X est connexe $\delta_B(X)$ est connexe.
- La dilatation et l'érosion sont des opérations non réversibles.
- La dilatation et l'érosion sont des opérations duales mais pas inverses l'une de l'autre.

$$\begin{array}{cccc} & & dilatation & \\ & X & \longrightarrow & \delta_B(X) \\ \text{complémentation} & \updownarrow & & \updownarrow \\ & \mathcal{C}_E(X) & \longrightarrow & \mathcal{E}_B(\mathcal{C}_E(X)) \end{array}$$

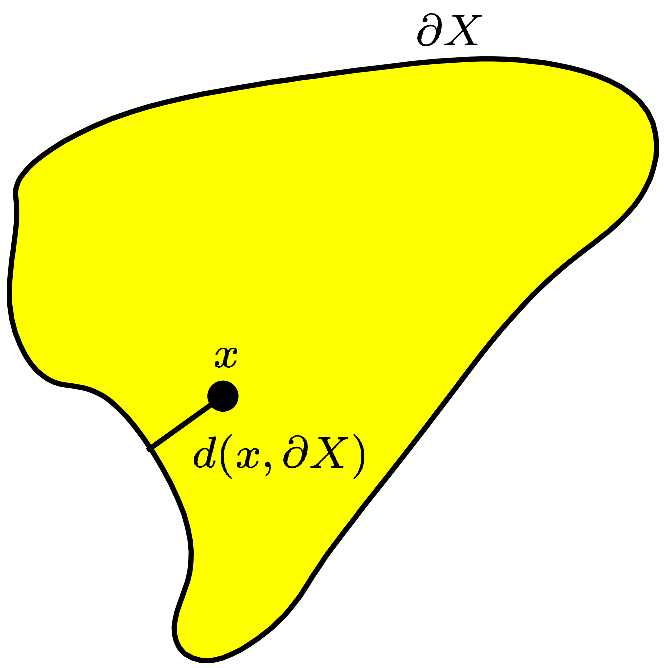
Calculs de Distances

- Élément Structurant p. 5
  - Définition,
  - Exemple,
  - Transposé
- Érosions et dilatations ensemblistes
  - Transformation en tout ou rien
  - L'érosion
  - L'érosion exemples
  - Transformation bi colorée
  - Érosion et soustraction de Minkowski
  - Dilatation
  - Dilatation : Exemples
  - Dilatation et addition de Minkowski
- Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblistes
  - Dualité,
  - Extensivité
  - Croissance,
  - Composition
  - Union, Intersection
  - Composition
  - Continuité supérieure de l'érosion
- Calculs de Distances
  - Distance d'un point à un ensemble
  - Distance et courone,
  - Distance par érosion : Algorithme
  - Exemples
  - Distance Externe
  - Extension à la distance de deux ens

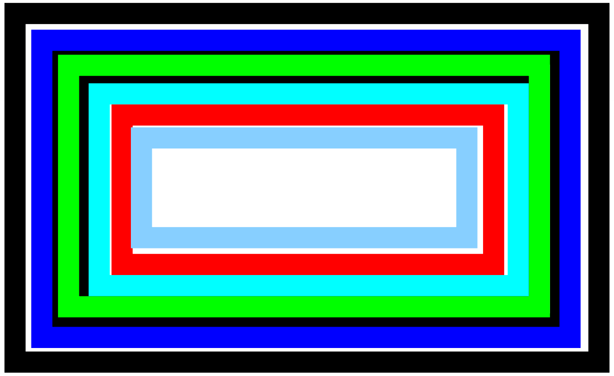
Distance d'un point d'un ensemble à sa frontière

- Soit $x \in X$

$$d(x, \partial X) = d(x, \mathcal{C}_E(X)) = \inf_{y \in \mathcal{C}_E(X)} d(x, y) = \inf_{y \in \partial X} d(x, y)$$



Distance et couronne

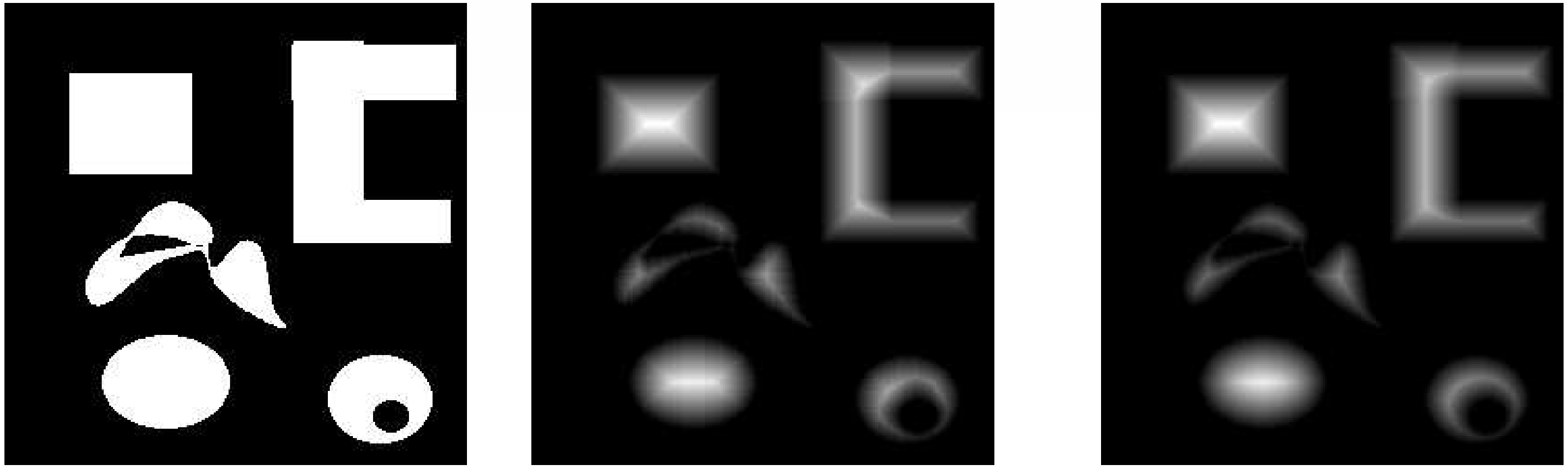


- ■ : dist=0
- ■ : dist=1
- ■ : dist=2
- ■ : dist=3
- ■ : dist=4…

Distance par érosion : Algorithme

- bin1=image de départ
- Création d'une image binaire vide grey0
- Recopie de bin1 dans grey0 ($f(x) = 1$ si $x \in X$, 0 sinon)
- Tant que bin1 non vide faire
  - bin1$\leftarrow \mathcal{E}_{1B}(bin1)$
  - grey0 $\leftarrow$ grey0 + bin1
- Fin tant que
- grey0 = fonction distance + 1

Fonction de distances : Exemples

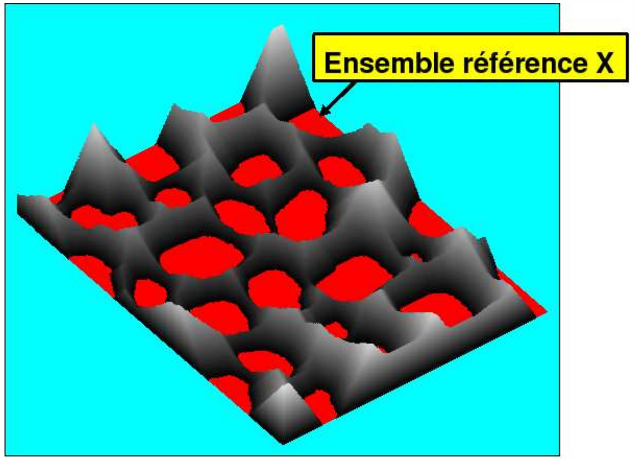


formes distance érosion distance euclidienne

- La distance par érosion n'est qu'une approximation de la distance euclidienne.

Distance externe

- Distance à un ensemble obtenue par dilatation.



Extension à la distance de deux ensembles

$$d(X,Y) = \inf_{(x,y)\in X\times Y} d(x,y)$$

- bin_0 = image binaire contenant X
- Extraction de la composante connexe X_i qui est placée dans l'image bin_1
- $bin_2 = bin_0/bin_1$ (on place dans bin_2 toutes les autres composantes connexes dans bin_2)
- Création d'une image binaire b3 vide
- d = 0 (initialisation de la valeur de la distance entre X_i et (X/X_i)
- Tant que bin_3 est vide
- faire
  - $bin_1 \leftarrow \delta_{1B}(bin_1)$
  - d = d + 1
  - $bin_3 = bin_1 \cap bin_2$
- Fin de boucle

Érosion et dilatation de fonctions

- Élément Structurant
- Érosions et dilatations ensemblistes
- Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblistes.
- Calculs de Distances
- Érosion et dilatation de fonctions
  - Nature de l'élément structurant,
  - Exemple d'élément structurant,
  - Erosion d'une fonction
  - Érosion avec élément structurant volumique
  - Exemples d'érosion
  - Dilatation d'une fonction
  - Dilatation avec élément structurant volumique
- Exemple de dilatation
- Résidus morphologiques
- Gradients morphologiques
  - Gradients morphologiques ensemblistes
  - Gradient morphologique interne fonctionnel
  - Gradient morphologique externe fonctionnel
  - Gradient morphologique symétrique fonctionnel
  - Laplacien Morphologique
  - Laplacien Morphologique : Exemple

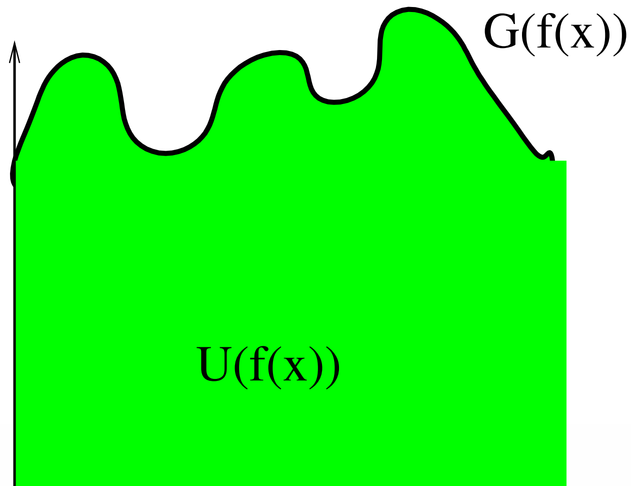
Érosion et dilatation de fonctions

- Pb : L'érosion et la dilatation n'ont été défini que dans le cadre ensembliste. Que faire avec $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$?
- Idée :Considérer la fonction comme un ensemble
  - Graphe de fonction :

$$G(f(x)) = \{(x,t) \,|\, t = f(x)\}$$

  - Ombre d'une fonction :

$$U(f(x)) = \{(x,t) \,|\, t \leq f(x)\}$$



Nature de l'élément structurant

- $U(f(x))$ est composé de couples (x,t) avec $t = f(x)$.
- L'élément structurant est composé de couples $(x, b(x))$ avec x a support borné.

$$B = \{(x,t) \,|\, x \in B' \text{ et } t \leq b(x)\}$$

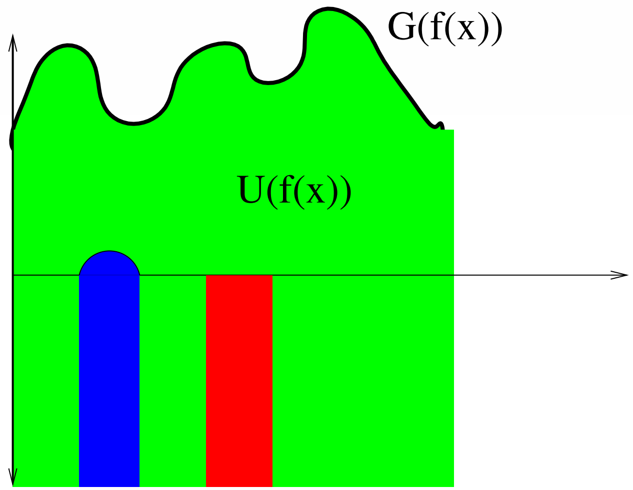
- b satisfait aux conditions suivantes :

$$b(x) = \begin{cases} x \in B' & \Rightarrow & b(x) & \neq & \pm\infty \\ x \notin B' & \Rightarrow & b(x) & = & -\infty \end{cases}$$

- On distingue les éléments structurant plats définis par :

$$b(x) = \begin{cases} x \in B' & \Rightarrow & b(x) & = & 0 \\ x \notin B' & \Rightarrow & b(x) & = & -\infty \end{cases}$$

Exemples d'éléments structurants



- Les éléments structurants non plats sont appelés des éléments structurants volumiques.

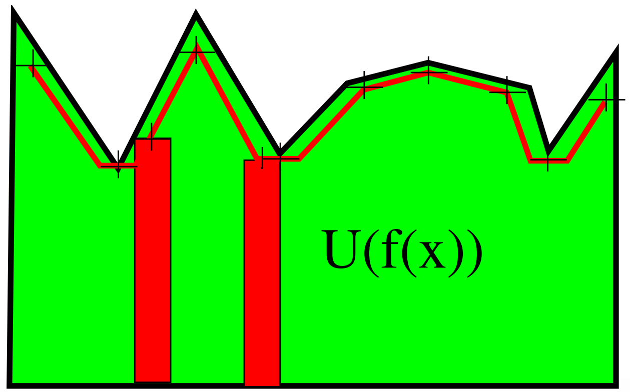
Érosion d'une fonction

- L'érosion d'une fonction est définie comme l'érosion ensembliste de son ombre.

$$\mathcal{E}_B(U(f(x))) = \{(x,t) \,|\, B_{(x,t)} \subset U(f(x))\}$$

- Question : A x fixé qu'elle est la valeur maximale de t telle que $B_{(x,t)} \subset U(f(x))$?
- Réponse : Dans le cas d'un élément structurant plat : La plus petite des valeur de f sur le support B' :

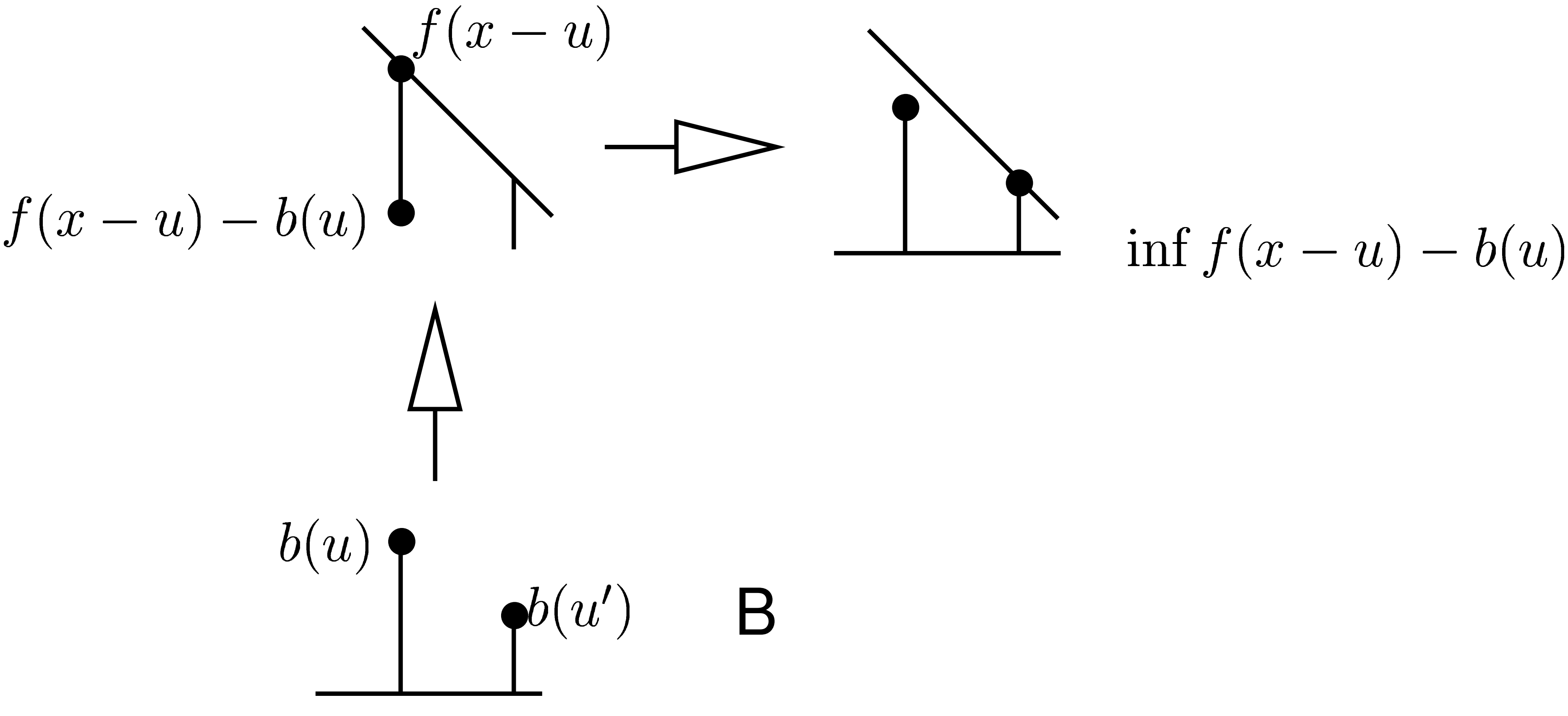
$$\mathcal{E}_B(f)(x) = \inf_{u \in B'} f(x-u)$$



Érosion avec élément structurant volumique

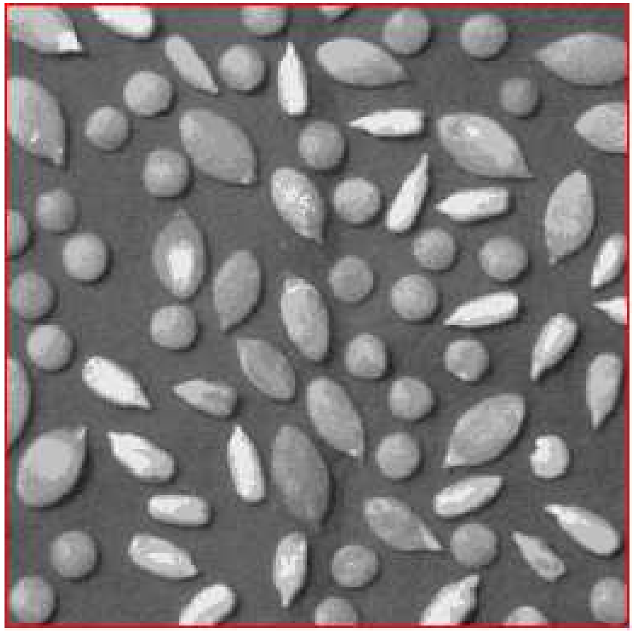
- Il faut que les hauteurs $b(u)$ soient dans $U(f(x))$

$$\mathcal{E}_B(f)(x) = \inf_{u \in B'} f(x-u) - b(u)$$

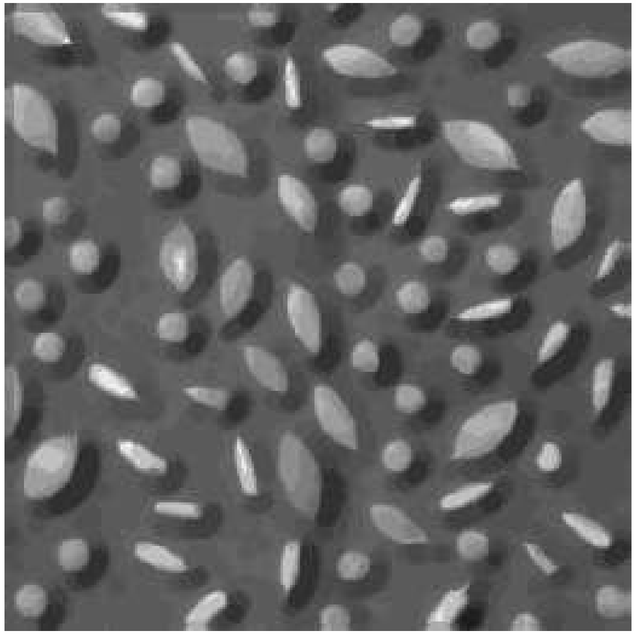


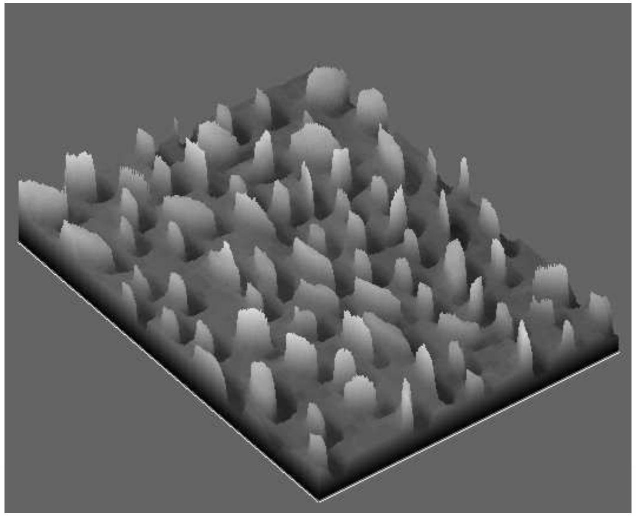
Exemple d’érosion (1)

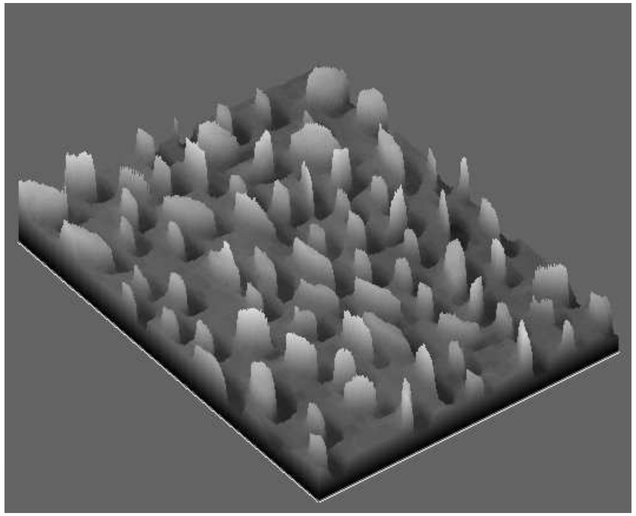
Original



Érodé (disque de taille 3)







L’image érodée est plus foncée, les pics se rétrécissent ou bien disparaissent

Exemple d’érosion (2)

- Erosion avec un élément structurant plat de support circulaire.

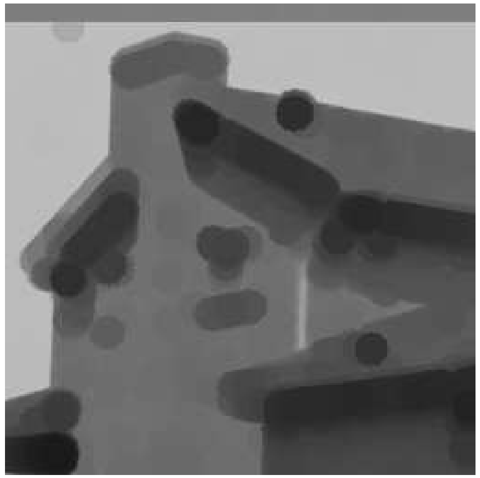
Original

$\mathcal{E}_{2B}(I)$

$\mathcal{E}_{3B}(I)$

$\mathcal{E}_{5B}(I)$

$\mathcal{E}_{7B}(I)$



$\mathcal{E}_{9B}(I)$

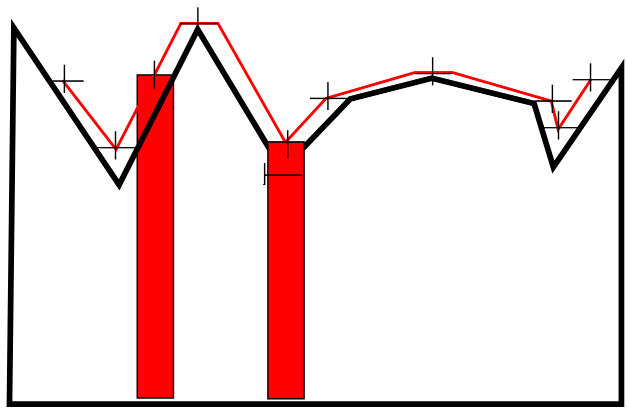
Dilatation d'une fonction

- Se définie de manière similaire à partir de l'ombre de la fonction :

$$\delta_B(U(f(x))) = \{(x,t) \mid B_{(x,t)} \cap U(f(x)) \neq \emptyset\}$$

- Question : A x fixé qu'elle est la valeur maximale de t telle que $B_{(x,t)} \cap U(f(x)) \neq \emptyset$?
- Réponse : Dans le cas d'un élément structurant plat : La plus grande des valeur de f sur le support B' :

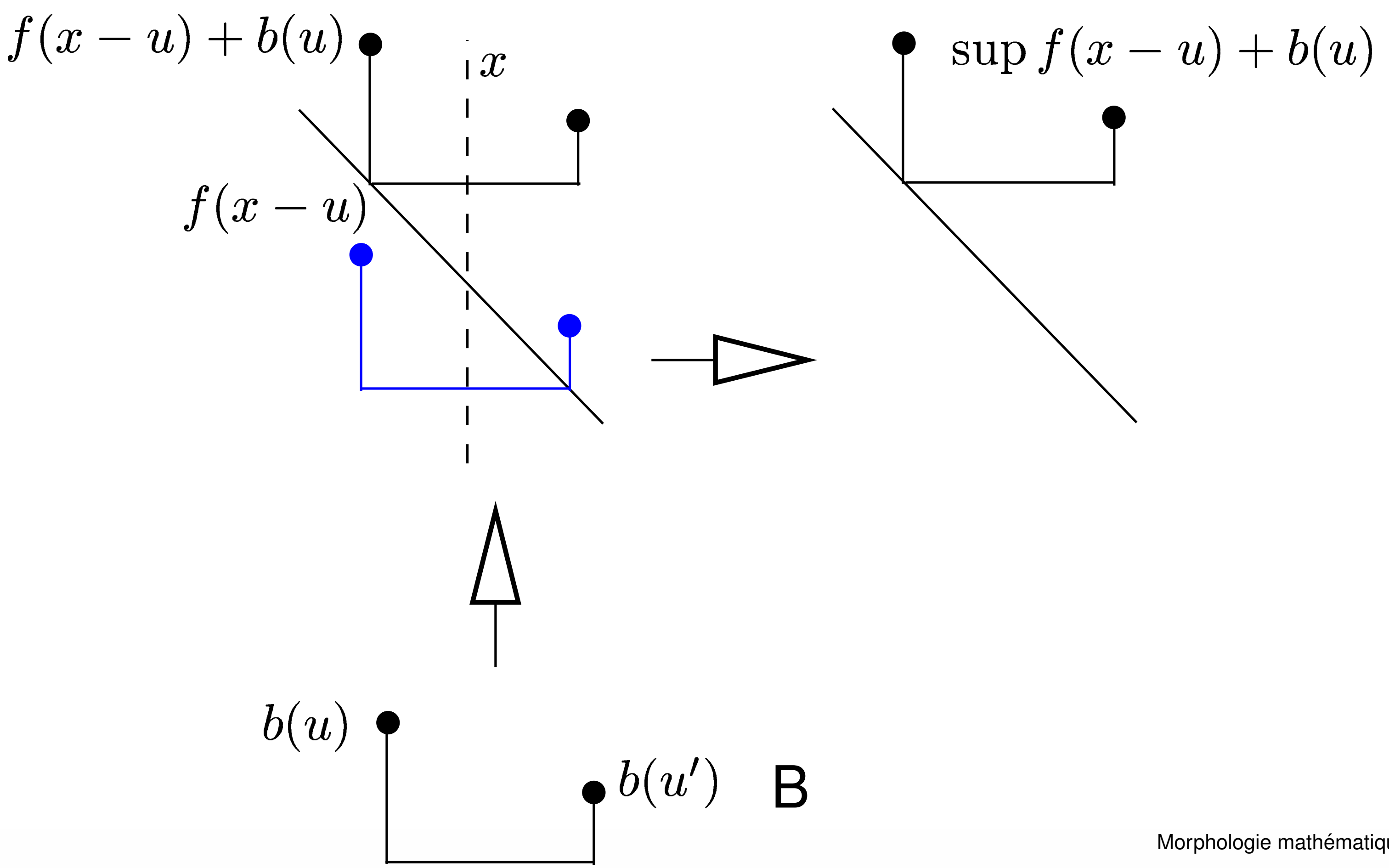
$$\delta_B(f)(x) = \sup u \in B' f(x-u)$$



Dilatation avec élément structurant volumique

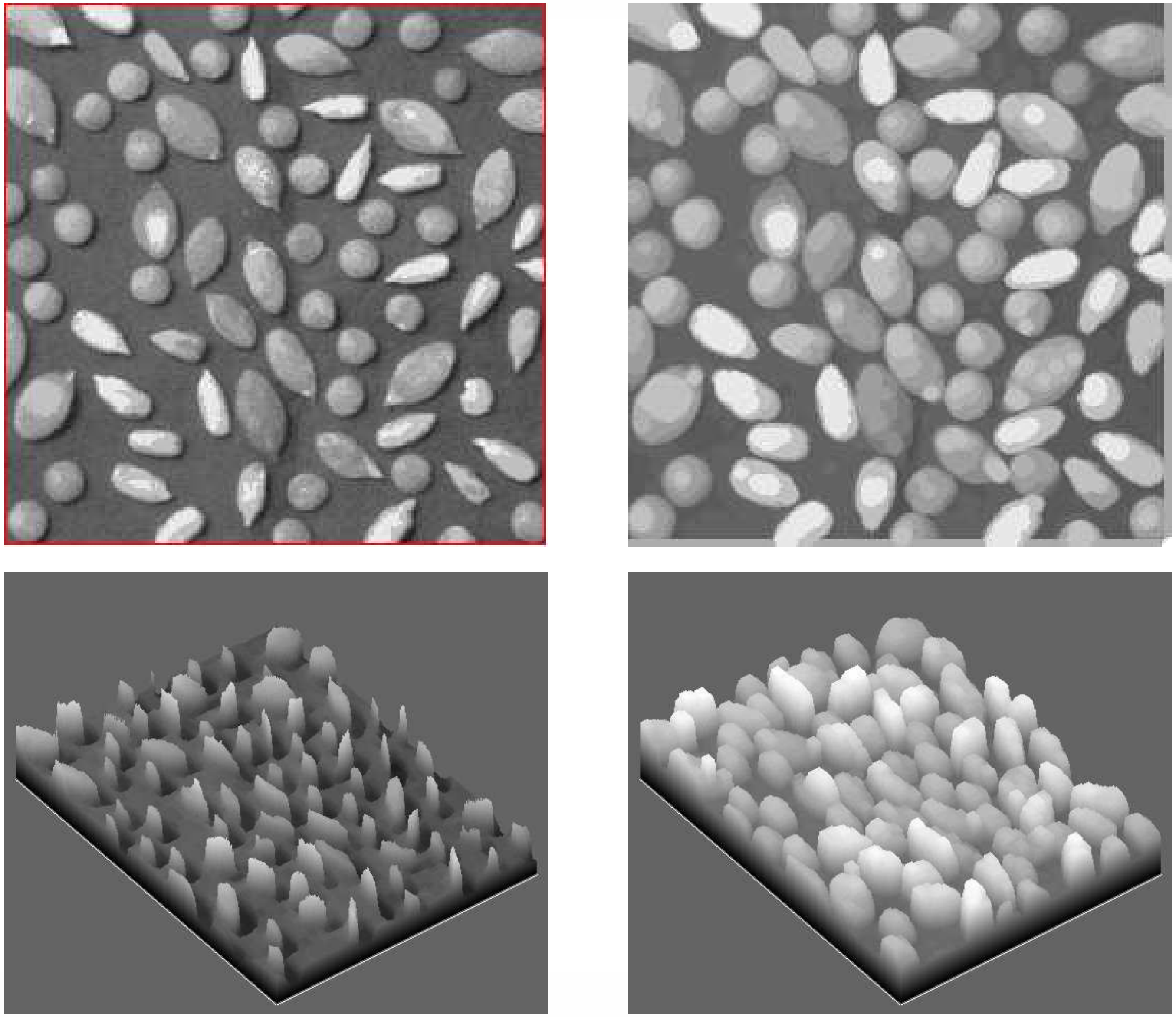
- De façon symétrique à l'érosion :

$$\delta_B(f)(x) = \sup_{u \in B'} f(x-u) + b(u)$$



Exemple de dilatation (1)

Original | dilaté (disque de taille 3)



L'image dilatée est plus claire. Les vallées étroites disparaissent

Exemple de dilatation (2)

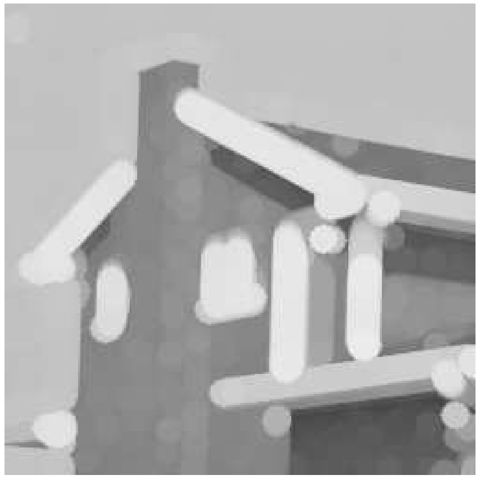
- Dilatation avec un élément structurant plat, circulaire.

Original

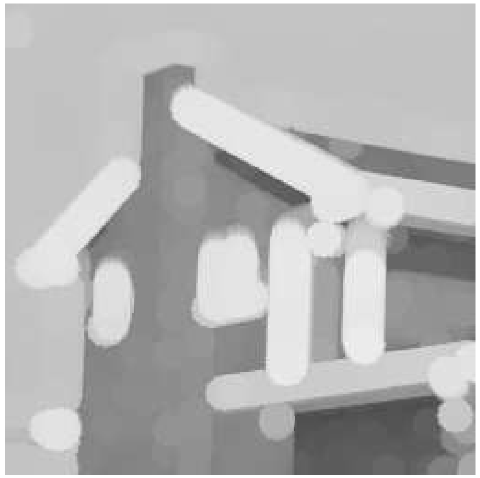
$\delta_{2B}(I)$

$\delta_{3B}(I)$

$\delta_{5B}(I)$



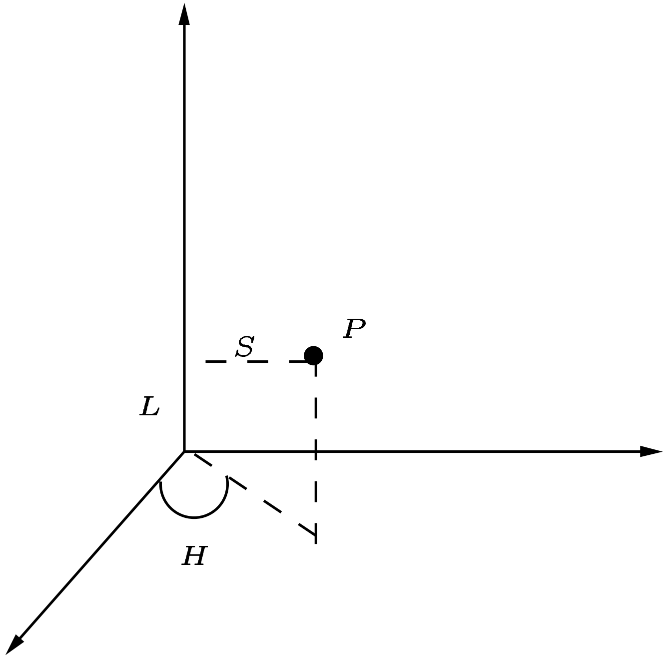
$\delta_{7B}(I)$



$\delta_{9B}(I)$

Erosion/Dilatation couleur dans l'espace HLS (1

- HLS correspond à un repère cyclindrique
  - L : Luminance (intensité)
  - S : Saturation (dominance de gris)
  - H : hue (couleur)



Erosion/Dilatation couleur dans l'espace HLS (2

- ω groupe un ensemble d'angles $\{h_1, \ldots, h_n\}$ forme un ω groupe ssi :

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} h_i - \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} h_i \leq \omega \leq \pi$$

- Dilatation en un point x par B.

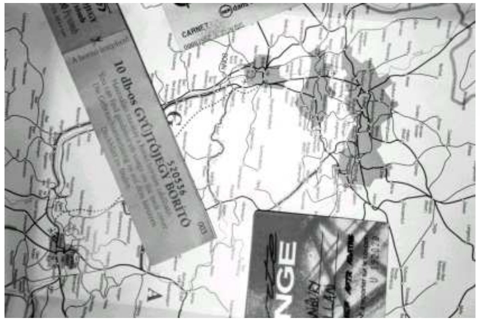
$$\delta_B(h)(x) = \begin{cases} \max_{x_i \in B_x} h(x_i) & \text{si } \{h(x_i), i \in B_x\} \text{ forme un } \omega \text{ groupe} \\ h(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Erosion en un point x par B.

$$\mathcal{E}_B(h)(x) = \begin{cases} \min_{x_i \in B_x} h(x_i) & \text{si } \{h(x_i), i \in B_x\} \text{ forme un } \omega \text{ groupe} \\ h(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Erosion/Dilatation HLS : Résultat

image



composante L

composante S

composante H

érosion H

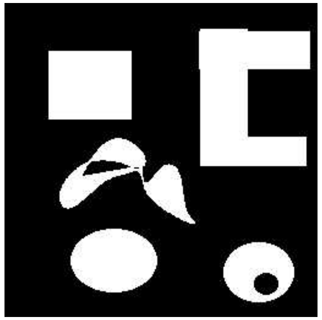
dilatation h

érosion S

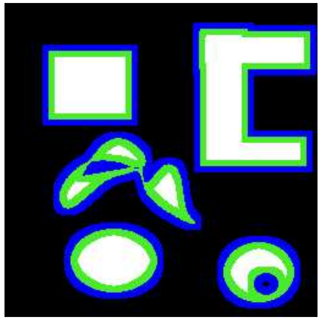
dilatation S

Résidus morphologiques

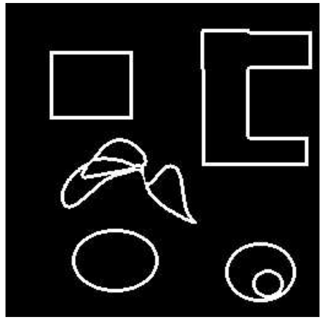
- En morphologie ensembliste un résidus correspond à la :
  - différence symétrique entre l'ensemble de départ X et son transformé $\psi(X)$.
  - différence symétrique entre deux transformations d'un $\psi_1(X)$ et $\psi_2(X)$ d'un ensemble.
- En morphologie fonctionnelle :
  - différence arithmétique entre $f(x)$ et $\psi(f(x))$,
  - différence arithmétique entre $\psi_1(f(x))$ et $\psi_2(f(x))$.
- Lorsque les transformations ψ_i sont des érosions ou des dilatations on parle de gradients morphologiques.



X



$\mathcal{E}_B(X) = \square, X = \square +$



$X \Delta \mathcal{E}_B(X)$

Gradients Morphologiques

- Élément Structurant
- Érosions et dilatations ensemblistes
- Propriétés de l'érosion et la dilatation ensemblistes.
- Calculs de Distances
- Érosion et dilatation de fonctions
  - Nature de l'élément structurant,
  - Exemple d'élément structurant,
  - Erosion d'une fonction
  - Érosion avec élément structurant volumique
  - Exemples d'érosion
  - Dilatation d'une fonction
  - Dilatation avec élément structurant volumique
- Exemple de dilatation
- Résidus morphologiques
- Gradients morphologiques
  - Gradients morphologiques ensemblistes
  - Gradient morphologique interne fonctionnel
  - Gradient morphologique externe fonctionnel
  - Gradient morphologique symétrique fonctionnel
  - Laplacien Morphologique
  - Laplacien Morphologique : Exemple

Gradients morphologiques

- Trois type de gradients :
  - Le gradient morphologique symmétrique (de Beucher) :

$$\nabla_B(X) = \delta_B(X) \Delta \mathcal{E}_B(X) \text{ et } \nabla_B(f(x)) = \delta_B(f(x)) - \mathcal{E}_B(f(x))$$

  - Gradient morphologique interne ou gradient par érosion :

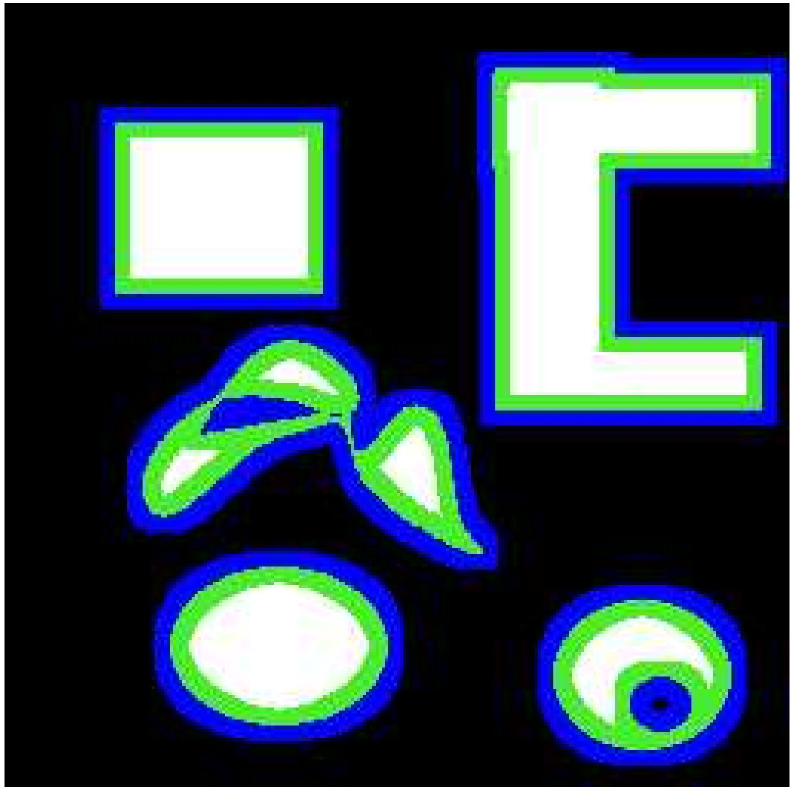
$$\nabla_B^-(X) = X \Delta \mathcal{E}_B(X) \text{ et } \nabla_B^-(f(x)) = f(x) - \mathcal{E}_B(f(x))$$

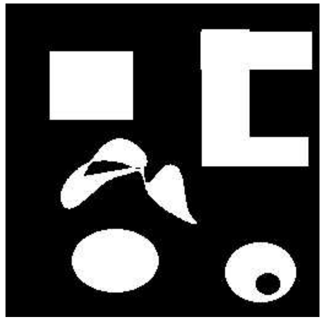
  - Gradient morphologique externe ou gradient par dilatation :

$$\nabla_B^+(X) = \delta_B(X) \Delta X \text{ et } \nabla_B^+(f(x)) = \delta_B(f(x)) - f(x)$$

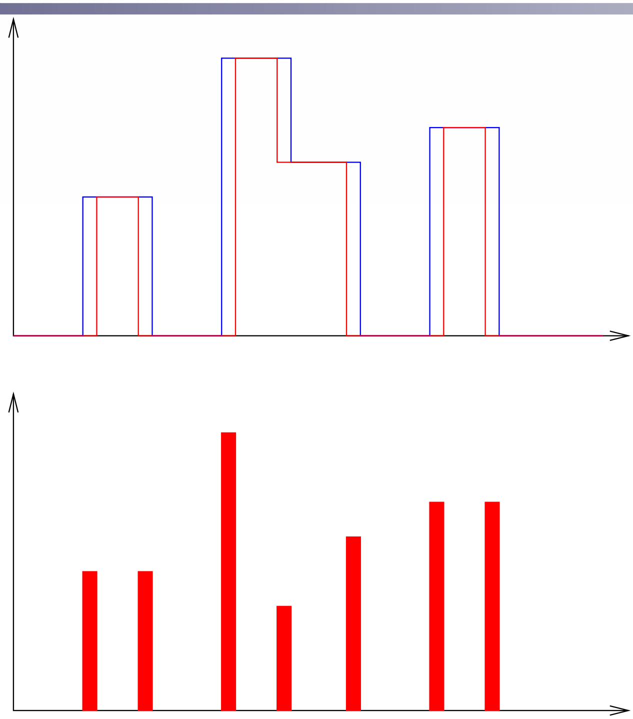
Gradients morphologiques ensemblistes

- Ensembles :
  - $\mathcal{E}_B(X) = \square$
  - $X = \square + {\color{green}\blacksquare}$
  - $\delta_B(X) = \square + {\color{green}\blacksquare} + {\color{blue}\blacksquare}$
- Gradients :
  - $\nabla_B(X) = {\color{green}\blacksquare} + {\color{blue}\blacksquare}$
  - $\nabla_B^{+}(X) = {\color{blue}\blacksquare}$
  - $\nabla_B^{-}(X) = {\color{green}\blacksquare}$





Gradient morphologique interne fonctionnel

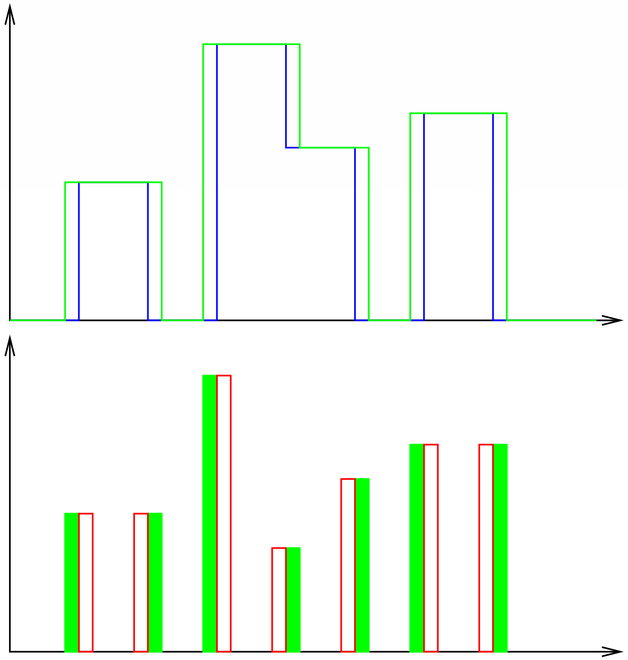


- $f(x)$: (blue line)
- $\mathcal{E}_B(f(x))$: (red line)
- $\nabla_B^-(f(x))$: (red bar)

		
I	$\mathcal{E}_B(I)$	$\nabla_B^-(I)$

Gradient morphologique externe fonctionnel

- $f(x)$:
- $\delta_B(f(x))$:
- $\nabla_B^+(f(x))$:
- $\nabla_B^-(f(x))$:



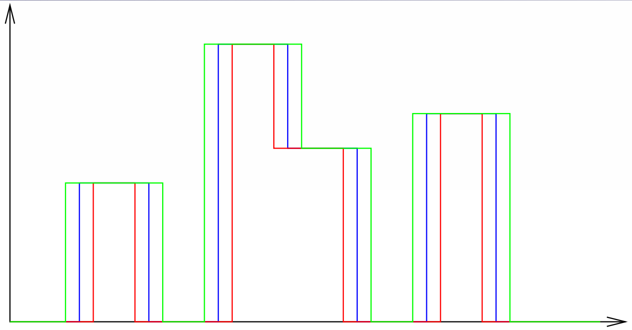
I

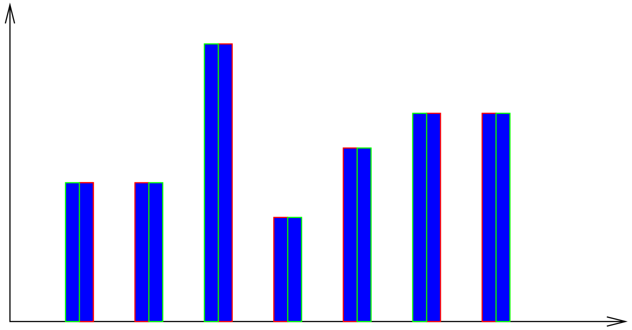
$\delta_B(I)$

$\nabla_B^-(I)$

Gradient morphologique symétrique fonctionnel

- $f(x)$:
- $\delta_B(f(x))$:
- $\mathcal{E}_B(f(x))$:
- $\nabla_B(f(x))$:
- $\nabla_B^-(f(x))$:
- $\nabla_B^+(f(x))$:

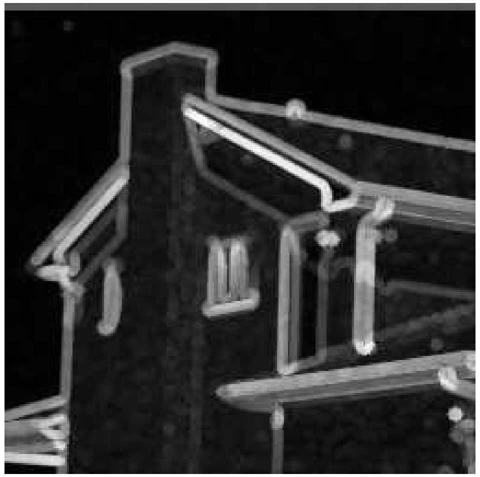




I

$\delta_B(I)$

$\mathcal{E}_B(I)$



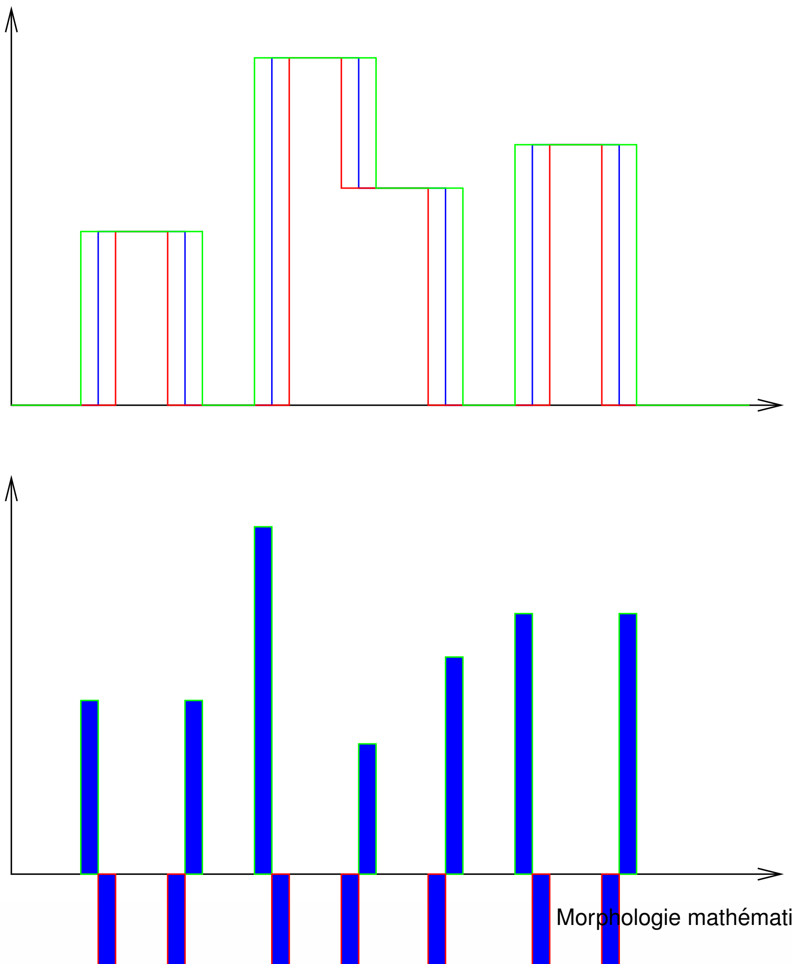
$\nabla_B^-(I)$

Laplacien Morphologique

- Le Laplacien morphologique est le résifu des gradients morphologiques externes et internes.

$$\mathcal{L}_B(f) = \nabla_B^+(f) - \nabla_B^-(f)$$

  - $f(x)$:
  - $\delta_B(f(x))$:
  - $\mathcal{E}_B(f(x))$:
  - $\mathcal{L}_B(f(x))$:
  - $\nabla_B^-(f(x))$:
  - $\nabla_B^+(f(x))$:



Laplacien Morphologique : Exemple

I

$\nabla_B^-(I)$

$\nabla_B^+(I)$

$\mathcal{L}_B(I)$