

Concepts de base

Nicolas Delestre, Michel Mainguenaud
{Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr

Modifié pour l'ENSI CAEN par
Luc Brun
luc.brun@ensicaen.fr



Notes

Plan...



- ▶ Le formalisme utilisé
- ▶ Qu'est ce qu'une variable ?
- ▶ Qu'est ce qu'un type ?
- ▶ Qu'est ce qu'une expression ?
- ▶ Qu'est ce qu'une affectation
- ▶ Les entrées / sorties ?

Notes

Formalisme...



- ▶ Un algorithme doit être lisible et compréhensible par plusieurs personnes
- ▶ Il doit donc suivre des règles
- ▶ Il est composé d'une entête et d'un corps :
- ▶ l'entête, qui spécifie :
 - ▶ le nom de l'algorithme
 - ▶ son utilité
- ▶ les données "en entrée", c'est-à-dire les éléments qui sont indispensables à son bon fonctionnement (**Entrée** :)
- ▶ les données "en sortie", c'est-à-dire les éléments calculés, produits, par l'algorithme (**Sortie** :)
- ▶ les données locales à l'algorithmique qui lui sont indispensables (**Déclaration** :)

Notes

Formalisme...



- ▶ le corps, qui est composé :
 - ▶ du mot clef **début**
 - ▶ d'une suite d'instructions **indentées**
 - ▶ du mot clef **fin**

Notes

▶ Exemple de code :

Nom: ajoutDeuxEntiers
Role: Additionner deux entiers a et b et mettre le résultat dans c
Entrée: a,b : entier
Sortie: c : entier
Déclaration: -
début

fin

Qu'est ce qu'une variable...

- ▶ Une variable est une entité qui
- ▶ une variable possède un nom, on parle **d'identifiant**
- ▶ une variable possède une valeur
- ▶ une variable possède un type qui caractérise l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable
- ▶ L'ensemble des variables sont stockées dans la mémoire de l'ordinateur

Nommage des variables

- ▶ Le nom d'une variable ne doit pas comporter d'espaces,
- ▶ Il doit être **significatif** (sauf pour les variables de boucle).
- ▶ Les noms de variables doit être construit en fonction de règles et être **systematique** :
- ▶ La règle :
 - ▶ Premier mot qui compose le nom de la variable en minuscule,
 - ▶ chaque mot suivant qui compose le nom de la variable prend une capitale.
 Exemple : ajoutDeuxEntiers, estPremier...
- ▶ Autre règle :
 - ▶ Tout en minuscule,
 - ▶ mots séparés par des soulignés (.).
 Exemple : ajout.deux.entiers, est.premier...

Qu'est ce qu'une variable...

- ▶ On peut faire l'analogie avec une armoire qui contiendrait des tiroirs étiquetés :
- ▶ l'armoire serait la mémoire de l'ordinateur
- ▶ les tiroirs seraient les variables (l'étiquette correspondrait à l'identifiant)
- ▶ le contenu d'un tiroir serait la valeur de la variable correspondante
- ▶ la couleur du tiroir serait le type de la variable (bleu pour les factures, rouge pour les bons de commande, etc.)

Qu'est ce qu'un type de données...



- ▶ Le type d'une variable caractérise :
- ▶ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable
- ▶ l'ensemble des actions que l'on peut effectuer sur une variable
- ▶ Lorsqu'une variable apparaît dans l'entête d'un algorithme on lui associe un type en utilisant la syntaxe suivante
- ▶ Identifiant de la variable : Son type
- ▶ Par exemple :
- ▶
- ▶
- ▶ Une fois qu'un type de données est associé à une variable, cette variable ne peut plus en changer
- ▶ Une fois qu'un type de données est associé à une variable le contenu de cette variable doit **obligatoirement** être du même type

9 / 298

Notes

Qu'est ce qu'un type de données...



- ▶ Par exemple, dans l'exemple précédent on a déclaré a et b comme des entiers
- ▶ a et b dans cet algorithme ne pourront pas stocker des réels
- ▶ a et b dans cet algorithme ne pourront pas changer de type
- ▶ Il y a deux grandes catégories de type :
- ▶ les types simples
- ▶ les types complexes (que nous verrons dans la suite du cours)

10 / 298

Notes

Les types simples...



- ▶ Il y a deux grandes catégories de type simple :
- ▶ Ceux dont le nombre d'éléments est fini, les
- ▶ Ceux dont le nombre d'éléments est infini, les

11 / 298

Notes

Les types simples dénombrables...



- ▶ **booléen**, les variables ne peuvent prendre que les valeurs VRAI ou FAUX
- ▶ **intervalle**, les variables ne peuvent prendre que les valeurs entières définies dans cet intervalle, par exemple 1..10
- ▶ **énuméré**, les variables ne peuvent prendre que les valeurs explicitées, par exemple les jours de la semaine (du lundi au dimanche)
- ▶ Ce sont les seuls types simples qui peuvent être définis par l'informaticien
- ▶ **caractères**
- ▶ Exemples :

12 / 298

Notes

Notez les règles pour le nom du type JoursDeLaSemaine.



- ▶ Si l'informaticien veut utiliser des énumérés, il doit définir le type dans l'entête de l'algorithme en explicitant toutes les valeurs de ce type de la façon suivante :
- ▶ $nom\ du\ type = \{valeur1, valeur2, \dots, valeurn\}$
- ▶ Par exemple :
- ▶ $JoursDeLaSemaine = \{Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi, Samedi, Dimanche\}$

Notes



- ▶ **entier** (positifs et négatifs)
- ▶ **naturel** (entiers positifs)
- ▶ **réel**
- ▶ **chaîne de caractères**, par exemple 'cours' ou 'algorithmique'
- ▶ Exemples :

Notes



- ▶ Un **opérateur** est un symbole d'opération qui permet d'agir sur des variables ou de faire des "calculs"
- ▶ Une **opérande** est une entité (variable, constante ou expression) utilisée par un opérateur
- ▶ Une **expression** est une combinaison d'opérateur(s) et d'opérande(s), elle est évaluée durant l'exécution de l'algorithme, et possède une valeur (son interprétation) et un type

Notes



- ▶ Par exemple dans $a+b$:
- ▶ a est l'opérande gauche
- ▶ $+$ est l'opérateur
- ▶ b est l'opérande droite
- ▶ $a+b$ est appelé une expression
- ▶ Si par exemple a vaut 2 et b 3, l'expression $a+b$ vaut 5
- ▶ Si par exemple a et b sont des entiers, l'expression $a+b$ est un entier

Notes

- ▶ Un opérateur peut être unaire ou binaire :
 - ▶ s'il n'admet qu'une seule opérande, par exemple l'opérateur `non`
 - ▶ s'il admet deux opérandes, par exemple l'opérateur `+`
- ▶ Un opérateur est associé à *un* type de donnée et ne peut être utilisé qu'avec des variables, des constantes, ou des expressions de ce type
- ▶ Par exemple l'opérateur `+` ne peut être utilisé qu'avec les types arithmétiques (naturel, entier et réel) ou (exclusif) le type chaîne de caractères
- ▶ **On ne peut pas additionner un entier et un caractère**
- ▶ Toutefois *exceptionnellement* dans certains cas on accepte d'utiliser un opérateur avec deux opérandes de types différents, c'est par exemple le cas avec les types arithmétiques (`2+3.5`)

17 / 298

Notes

- ▶ La signification d'un opérateur peut changer en fonction du type des opérandes
- ▶ Par exemple l'opérateur `+` avec des entiers aura pour sens l'addition, mais avec des chaînes de caractères aura pour sens la **concaténation**
- ▶ `2+3` vaut
- ▶ `"bonjour" + " tout le monde"` vaut

18 / 298

Notes

- ▶ Pour les booléens nous avons les opérateurs `non`, `et`, `ou`, `ouExclusif`

▶ `non`

a	non a
Vrai	Faux
Faux	Vrai

▶ `et`

a	b	a et b
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

19 / 298

Notes

▶ `ou`

a	b	a ou b
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

▶ `ouExclusif`

a	b	a ouExclusif b
Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

20 / 298

Notes

Les opérateurs sur les énumérés...



- ▶ Pour les énumérés nous avons trois opérateurs succ, pred, ord :
- ▶ succ permet d'obtenir le successeur, par exemple avec le type JourDeLaSemaine :
 - ▶ succ Lundi vaut Mardi
 - ▶ succ Dimanche vaut Lundi
- ▶ pred permet d'obtenir le prédécesseur, par exemple avec le type JourDeLaSemaine :
 - ▶ pred Mardi vaut Lundi
 - ▶ pred Lundi vaut Dimanche
- ▶ ord permet d'obtenir le naturel de l'énuméré spécifié dans la bijection du type énuméré vers les naturels, par exemple avec le type JourDeLaSemaine :
 - ▶ ord Lundi vaut 0
 - ▶ ord Dimanche vaut 6

21 / 298

Notes

Les opérateurs sur les caractères...



- ▶ Pour les caractères on retrouve les trois opérateurs des énumérés avec en plus un quatrième opérateur nommé car qui est le dual de l'opérateur ord avec comme fonction de bijection la table de correspondance de la norme ASCII
- ▶ Cf. <http://www.commentcamarche.net/base/ascii.htm>
- ▶ Par exemple
 - ▶ ord A vaut 65
 - ▶ car 65 vaut A
 - ▶ pred A vaut @
- ▶ L'opérateur pour les chaînes de caractères
- ▶ C'est l'opérateur de concaténation vu précédemment qui est +

22 / 298

Notes

Les opérateurs sur les naturels, entiers et réels...



- ▶ On retrouve tout naturellement +, -, /, *
- ▶ Avec en plus pour les naturels et les entiers div et mod, qui permettent respectivement de calculer une division entière et le reste de cette division, par exemple :
 - ▶ 11 div 2 vaut
 - ▶ 11 mod 2 vaut

23 / 298

Notes

L'opérateur d'égalité, d'inégalité, etc...



- ▶ L'opérateur d'égalité
- ▶ C'est l'opérateur que l'on retrouve chez tous les types simples qui permet de savoir si les deux opérandes sont égales
- ▶ Cet opérateur est représenté par le caractère =
- ▶ Une expression contenant cet opérateur est un booléen
- ▶ On a aussi l'opérateur d'inégalité ≠
- ▶ Et pour les types possédant un ordre les opérateurs de comparaison <, ≤, ≥, >

24 / 298

Notes



- ▶ Tout comme en arithmétique les opérateurs ont des priorités
- ▶ Par exemple
- ▶ Pour les booléens, la priorité des opérateurs est non, et, ouExclusif et ou
- ▶ Pour clarifier les choses (ou pour dans certains cas supprimer toutes ambigüités) on peut utiliser des parenthèses

Notes



- ▶ On ne peut faire que deux choses avec une variable :
 1. Obtenir son contenu (*regarder le contenu du tiroir*)
 - ▶ Cela s'effectue simplement en nommant la variable
 2. Affecter un (nouveau) contenu (mettre une (nouvelle) information dans le tiroir)
 - ▶ Cela s'effectue en utilisant l'opérateur d'affectation représenté par le symbole ←
 - ▶ La syntaxe de cet opérateur est : `identifiant de la variable ← expression sans opérateur d'affectation`

Notes



- ▶ Par exemple l'expression `c ← a + b` se comprend de la façon suivante :
 - ▶ On prend la valeur contenue dans la variable a
 - ▶ On prend la valeur contenue dans la variable b
 - ▶ On additionne ces deux valeurs
 - ▶ On met ce résultat dans la variable c
 - ▶ Si c avait auparavant une valeur, cette dernière est perdue !

Notes



- ▶ Un algorithme peut avoir des interactions avec l'utilisateur
- ▶ Il peut afficher un résultat (du texte ou le contenu d'une variable) et demander à l'utilisateur de saisir une information afin de la stocker dans une variable
- ▶ En tant qu'informaticien on raisonne en se mettant "**à la place de la machine**", donc :
 - ▶ Pour afficher une information on utilise la commande **écrire** suivie entre parenthèses de la chaîne de caractères entre guillemets et/ou des variables de type simple à afficher séparées par des virgules, par exemple :
 - ▶
 - ▶ Pour donner la possibilité à l'utilisateur de saisir une information on utilise la commande **lire** suivie entre parenthèses de la variable de type simple qui va recevoir la valeur saisie par l'utilisateur, par exemple :
 - ▶

Notes



Nom: euroVersFranc1
Role: Convertisseur des sommes en euros vers le franc, avec saisie de la somme en euro et affichage de la somme en franc
Entrée: -
Sortie: -
Déclaration: valeurEnEuro,valeurEnFranc,tauxConversion : Réel
début
 tauxConversion ← 6.55957
 écrire("Votre valeur en euro :")
 lire(valeurEnEuro)
 valeurEnFranc ← valeurEnEuro * tauxConversion
 écrire(valeurEnEuro," euros = ",valeurEnFranc," Frs")
fin

Notes



Nom: euroVersFranc2
Role: Convertisseur des sommes en euros vers le franc
Entrée: valeurEnEuro : Réel
Sortie: valeurEnFranc : Réel
Déclaration: tauxConversion : Réel
début
 tauxConversion ← 6.55957
 valeurEnFranc ← valeurEnEuro * tauxConversion
fin

Notes



Conditionnelles et itérations

Nicolas Delestre et Michel Mainguenaud
 {Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr
 Modifié pour l'ENSICAEN par :
 Luc Brun
 luc.brun@ensicaen.fr



Notes



- ▶ Rappels sur la logique
- ▶ Les conditionnelles
- ▶ Les itérations

Notes



- ▶ Valeurs possibles : Vrai ou Faux
- ▶ Opérateurs logiques : non et ou
- ▶ optionnellement ouExclusif mais ce n'est qu'une combinaison de non , et et ou
- ▶ a ouExclusif $b = (\text{non } a \text{ et } b) \text{ ou } (a \text{ et non } b)$
- ▶ Priorité sur les opérateurs :
- ▶ Associativité des opérateurs et et ou
- ▶ $a \text{ et } (b \text{ et } c) = (a \text{ et } b) \text{ et } c$
- ▶ Commutativité des opérateurs et et ou
- ▶ $a \text{ et } b = b \text{ et } a$
- ▶ $a \text{ ou } b = b \text{ ou } a$

Notes



- ▶ Distributivité des opérateurs et et ou
- ▶ $a \text{ ou } (b \text{ et } c) = (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c)$
- ▶ $a \text{ et } (b \text{ ou } c) = (a \text{ et } b) \text{ ou } (a \text{ et } c)$
- ▶ Involution
- ▶ $\text{non non } a = a$
- ▶ Loi de Morgan
- ▶ $\text{non } (a \text{ ou } b) = \text{non } a \text{ et non } b$
- ▶ $\text{non } (a \text{ et } b) = \text{non } a \text{ ou non } b$

Notes



- ▶ Jusqu'à présent les instructions d'un algorithme étaient **toutes** interprétées **séquentiellement**
- ▶ **Nom:** euroVersFranc2
Role: Convertisseur des sommes en euros vers le franc
Entrée: valeurEnEuro : Réel
Sortie: valeurEnFranc : Réel
Déclaration: tauxConversion : Réel
début
 tauxConversion ← 6.55957
 valeurEnFranc ← valeurEnEuro * tauxConversion
fin
- ▶ Mais il se peut que l'on veuille conditionner l'exécution d'un algorithme
- ▶ Par exemple la résolution d'une équation du second degré est conditionnée par le signe de Δ

Notes



- ▶ L'instruction **si alors sinon** permet de conditionner l'exécution d'un algorithme à la valeur d'une expression booléenne
- ▶ Sa syntaxe est :
- ▶ Le deuxième partie de l'instruction est optionnelle, on peut avoir la syntaxe suivante :

Notes

Exemple (1/3)



Nom: abs
Role: Calcule la valeur absolue d'un entier
Entrée: unEntier : Entier
Sortie: laValeurAbsolue : Entier
Déclaration: -
début
 si unEntier \geq 0 alors
 laValeurAbsolue \leftarrow unEntier
 sinon
 laValeurAbsolue \leftarrow -unEntier
 finsi
fin

37 / 298

Notes

Exemple (2/3)



Nom: max
Role: Calcule le maximum de deux entiers
Entrée: lEntier1, lEntier2 : Entier
Sortie: leMaximum : Entier
Déclaration: -
début
 si lEntier1 < lEntier2 alors
 leMaximum \leftarrow lEntier2
 sinon
 leMaximum \leftarrow lEntier1
 finsi
fin

38 / 298

Notes

Exemple (3/3)



Nom: max
Role: Calcule le maximum de deux entiers
Entrée: lEntier1, lEntier2 : Entier
Sortie: leMaximum : Entier
Déclaration: -
début
 leMaximum \leftarrow lEntier1
 si lEntier2 > lEntier1 alors
 leMaximum \leftarrow lEntier2
 finsi
fin

39 / 298

Notes

L'instruction cas



- ▶ Lorsque l'on doit comparer une **même** variable avec plusieurs valeurs, comme par exemple :

```
si a=1 alors
  faire une chose
sinon
  si a=2 alors
    faire une autre chose
  sinon
    si a=4 alors
      faire une autre chose
    sinon ...
  finsi
finsi
```

- ▶ On peut remplacer cette suite de si par l'instruction cas

40 / 298

Notes



► Sa syntaxe est :

- où :
- v_1, \dots, v_n sont des **constantes** de type **scalaire** (entier, naturel, énuméré, ou caractère)
- $action_i$ est exécutée si $v = v_i$ (on quitte ensuite l'instruction cas)
- $action$ est exécutée si $\forall i, v \neq v_i$

Notes

Exemple



Nom: moisA30Jours
Role: Détermine si un mois à 30 jours
Entrée: mois : **Entier**
Sortie: resultat : **Booléen**
Déclaration:
début
 cas où mois **vaut**
 4,6,9,11 : résultat ←Vrai
 autre : résultat ←Faux
 fin cas
fin

Notes

Les itérations



- Lorsque l'on veut répéter plusieurs fois un même traitement, plutôt que de copier n fois la ou les instructions, on peut demander à l'ordinateur d'exécuter n fois un morceau de code
- Il existe deux grandes catégories d'itérations :
 - Les itérations :
le nombre de boucle est défini à l'entrée de la boucle
 - les itérations :
l'exécution de la prochaine boucle est conditionnée par une expression booléenne

Notes

Les itérations déterministes



- Il existe une seule instruction permettant de faire des boucles déterministes, c'est l'instruction pour
- Sa syntaxe est :
- dans ce cas la variable utilisée prend successivement les valeurs comprises entre *valeur de début* et *valeur de fin*

Notes

Nom: somme

Role: Calculer la somme des n premiers entiers positifs,

$s=0+1+2+\dots+n$

Entrée: n : **Naturel**

Sortie: s : **Naturel**

Déclaration: i : **Naturel**

début

s ← 0

pour i ← 0 **à** n **faire**

s ← s+i

finpour

fin

45 / 298

Notes

Les itérations indéterministes



► Il existe deux instructions permettant de faire des boucles indéterministes :

► L'instruction **tant que** :

► qui signifie que tant que l'expression booléenne est vraie on exécute les instructions

► L'instruction **répéter jusqu'à ce que** :

► qui signifie que les instructions sont exécutées jusqu'à ce que l'expression booléenne soit vraie

46 / 298

Notes

Les itérations indéterministes



► À la différence de l'instruction *tant que*, dans l'instruction *répéter jusqu'à ce que* les instructions sont exécutées au moins une fois

► Si vous ne voulez pas que votre algorithme "tourne" indéfiniment, l'expression booléenne doit faire intervenir des variables dont le contenu doit être modifié par au moins une des instructions du corps de la boucle

47 / 298

Notes

Un exemple



Nom: invFact

Role: Détermine le plus grand entier e tel que $e! \leq n$

Entrée: n : **Naturel** ≥ 1

Sortie: e : **Naturel**

Déclaration: fact : **Naturel**

début

fact ← 1

e ← 1

tant que fact ≤ n **faire**

e ← e+1

fact ← fact*e

fantantque

e ← e-1

fin

48 / 298

Notes



Nom: invFact
Role: Détermine le plus grand entier e tel que $e! \leq n$
Entrée: n : **Naturel** ≥ 1
Sortie: e : **Naturel**
Déclaration: fact : **Naturel**
début
 fact $\leftarrow 1$
 e $\leftarrow 1$
tant que fact $\leq n$ **faire**
 e $\leftarrow e+1$
 fact \leftarrow fact*e
fin tant que
 e $\leftarrow e-1$
fin

	n	e	fact	fact \leq n
fact $\leftarrow 1$	10	?	1	vrai
e $\leftarrow e+1$	10	1	1	vrai
fact \leftarrow fact*e	10	2	2	vrai
e $\leftarrow e+1$	10	3	6	vrai
fact \leftarrow fact*e	10	4	24	faux
e $\leftarrow e+1$	10	3	24	faux
e $\leftarrow e-1$	10	3	24	faux

Notes

Un autre exemple



Nom: calculerPGCD
Role: Calculer le pgcd(a,b) à l'aide de l'algorithme d'Euclide
Entrée: a,b : **Naturel** non nul
Sortie: pgcd : **Naturel**
Déclaration: reste : **Naturel**
début
répéter
 reste \leftarrow a mod b
 a \leftarrow b
 b \leftarrow reste
jusqu'à ce que reste=0
 pgcd \leftarrow a
fin

	a	b	reste	reste = 0
initialisation	21	14	?	?
itération 1	14	7	7	faux
itération 2	7	0	0	vrai

Notes

Algorithmique



Variables (locales et globales), fonctions et procédures

Nicolas Delestre et Michel Mainguenaud
 {Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr

Modifié pour l'ENSI CAEN par :
 Luc Brun
 luc.brun@ensicaen.fr



Notes

Plan



- ▶ Rappels
- ▶ Les sous-programmes
- ▶ Variables locales et variables globales
- ▶ Structure d'un programme
- ▶ Les fonctions
- ▶ Les procédures

Notes

- ▶ Dans ce cours nous allons parler de "programme" et de "sous-programme"
- ▶ Il faut comprendre ces mots comme "programme algorithmique" indépendant de toute implantation

Rappels

- ▶ La méthodologie de base de l'informatique est :
 1. **Abstraire**
 - ▶ le plus longtemps possible l'instant du codage
 2. **Décomposer**
 - ▶ " chacune des difficultés que j'examinerai en autant de parties qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre." Descartes
 3. **Combiner**
 - ▶ Résoudre le problème par d'abstractions

Par exemple

- ▶ Résoudre le problème suivant :
 - Écrire un programme qui affiche en ordre croissant les notes d'une promotion suivies de la note la plus faible, de la note la plus élevée et de la moyenne
- ▶ Revient à résoudre les problèmes suivants :
 - ▶ Remplir un tableau de naturels avec des notes saisies par l'utilisateur
 - ▶ Afficher un tableau de naturels
 - ▶ Trier un tableau de naturel en ordre croissant
 - ▶ Trouver le plus petit naturel d'un tableau
 - ▶ Trouver le plus grand naturel d'un tableau
 - ▶ Calculer la moyenne d'un tableau de naturels
- ▶ Chacun de ces sous-problèmes devient un nouveau problème à résoudre
- ▶ Si on considère que l'on sait résoudre ces sous-problèmes, alors on sait "quasiment" résoudre le problème initial

Sous-programme

- ▶ Donc écrire un programme qui résout un problème revient toujours à écrire des sous-programmes qui résolvent des sous parties du problème initial
- ▶ En algorithmique il existe deux types de sous-programmes :
 - ▶ Les
 - ▶ Les
- ▶ Un sous-programme est obligatoirement caractérisé par un nom (un identifiant) unique
- ▶ Lorsqu'un sous programme a été explicité (on a donné l'algorithme), son nom devient une nouvelle instruction, qui peut être utilisé dans d'autres (sous-)programmes
- ▶ Le (sous-)programme qui utilise un sous-programme est appelé **(sous-)programme appelant**

- ▶ Nous savons maintenant que les variables, les constantes, les types définis par l'utilisateur (comme les énumérateurs) et que les sous-programmes possèdent un nom
- ▶ Ces noms doivent suivre certaines règles :
 - ▶ Ils doivent être explicites (à part quelques cas particuliers, comme par exemple les variables i et j pour les boucles)
 - ▶ Ils ne peuvent contenir que des lettres et des chiffres
 - ▶ Ils commencent obligatoirement par une lettre
 - ▶ Les variables et les sous-programmes commencent toujours par une minuscule
 - ▶ Les types commencent toujours par une majuscule
 - ▶ Les constantes ne sont composées que de majuscules
 - ▶ Lorsqu'ils sont composés de plusieurs mots, on utilise les majuscules (sauf pour les constantes) pour séparer les mots (par exemple JourDeLaSemaine)

Les différents types de variable

- ▶ Définitions :
 - ▶ La **portée** d'une variable est l'ensemble des sous-programmes où cette variable est connue (les instructions de ces sous-programmes peuvent utiliser cette variable)
 - ▶ Une variable définie au niveau du programme principal (celui qui résout le problème initial, le problème de plus haut niveau) est appelée
 - ▶ Sa portée est totale : tout sous-programme du programme principal peut utiliser cette variable
 - ▶ Une variable définie au sein d'un sous programme est appelée
 - ▶ La portée d'une variable locale est uniquement le sous-programme qui la déclare
 - ▶ Lorsque le nom d'une variable locale est identique à une variable globale, la variable globale est localement masquée
 - ▶ Dans ce sous-programme la variable globale devient inaccessible

Structure d'un programme

- ▶ Un programme doit suivre la structure suivante :

Programme *nom du programme*
Définition des constantes
Définition des types
Déclaration des variables globales
Définition des sous-programmes
début
instructions du programme principal
fin

Les paramètres

- ▶ Un paramètre d'un sous-programme est une variable locale particulière qui est associée à une variable ou constante (numérique ou définie par le programmeur) du (sous-)programme appelant :
 - ▶ Puisque qu'un paramètre est une variable locale, un paramètre admet un type
 - ▶ Lorsque le (sous-)programme appelant appelle le sous-programme il doit indiquer la variable (ou la constante), de même type, qui est associée au paramètre
- ▶ Par exemple, si le sous-programme `sqr` permet de calculer la racine carrée d'un réel :
 - ▶ Ce sous-programme admet un seul paramètre de type réel positif
 - ▶ Le (sous-)programme qui utilise `sqr` doit donner le réel positif dont il veut calculer la racine carrée, cela peut être :
 - ▶ une variable, par exemple `a`
 - ▶ une constante, par exemple `5.25`



- ▶ Il existe trois types d'association (que l'on nomme **passage de paramètre**) entre le paramètre et la variable (ou la constante) du (sous-)programme appelant :
- ▶ Le **passage de paramètre en**
- ▶ Le **passage de paramètre en**
- ▶ Le **passage de paramètre en**

Notes

Le passage de paramètres en entrée



- ▶ Les instructions du sous-programme ne l'entité (variable ou constante) du (sous-)programme appelant
- ▶ En fait c'est la valeur de l'entité du (sous-) programme appelant qui est copiée dans le paramètre (à part cette copie il n'y a pas de relation entre le paramètre et l'entité du (sous-)programme appelant)
- ▶ C'est le seul passage de paramètre qui admet l'utilisation d'une constante
- ▶ Par exemple :
- ▶ le sous-programme **sqr** permettant de calculer la racine carrée d'un nombre admet un paramètre en entrée
- ▶ le sous-programme **écrire** qui permet d'afficher des informations admet n paramètres en entrée

Notes

Le passage de paramètres en sortie



- ▶ Les instructions du sous-programme une valeur à ce paramètre (valeur qui est donc aussi affectée à la variable associée du (sous-)programme appelant)
- ▶ Il y a donc une liaison forte entre le paramètre et l'entité du (sous-) programme appelant
- ▶ C'est pour cela qu'on ne peut pas utiliser de constante pour ce type de paramètre
- ▶ La valeur que pouvait posséder la variable associée du (sous-)programme appelant par le sous-programme
- ▶ Par exemple :
- ▶ le sous-programme **lire** qui permet de mettre dans des variables des valeurs saisies par l'utilisateur admet n paramètres en sortie

Notes

Le passage de paramètres en entrée/sortie



- ▶ Passage de paramètre qui combine les deux précédentes
- ▶ A utiliser lorsque le sous-programme doit la valeur de la variable du (sous-)programme appelant
- ▶ Comme pour le passage de paramètre en sortie, on ne peut pas utiliser de constante
- ▶ Par exemple :
- ▶ le sous-programme **échanger** qui permet d'échanger les valeurs de deux variables

Notes



- ▶ Les fonctions sont des sous-programmes admettant des paramètres et retournant un (comme les fonctions mathématiques $y=f(x,y,\dots)$)
- ▶ les paramètres sont en nombre fixe (≥ 0)
- ▶ une fonction possède un seul type, qui est le type de la valeur retournée
- ▶ le passage de paramètre est : c'est pour cela qu'il n'est pas précisé
- ▶ lors de l'appel, on peut donc utiliser comme paramètre des variables, des constantes mais aussi des résultats de fonction
- ▶ la valeur de retour est spécifiée par l'instruction **retourner**
- ▶ Généralement le nom d'une fonction est soit un nom (par exemple *minimum*), soit une question (par exemple *estVide*)

Notes



- ▶ On déclare une fonction de la façon suivante :
fonction *nom de la fonction (paramètre(s) de la fonction)* : *type de la valeur retournée*
 Déclaration *variable locale 1 : type 1 ; ...*
 début
 instructions de la fonction avec au moins une fois l'instruction retourner
 retourner
 fin
- ▶ On utilise une fonction en précisant son nom suivi des paramètres entre parenthèses
- ▶ Les parenthèses sont toujours présentes même lorsqu'il n'y a pas de paramètre

Notes

Exemple de déclaration de fonction



```

fonction abs (unEntier : Entier) : Entier
début
  si unEntier ≥ 0 alors
    retourner unEntier
  finsi
  retourner
fin
    
```

Remarque : Cette fonction est équivalente à :

```

fonction abs (unEntier : Entier) : Entier
  Déclaration tmp : Entier
début
  si unEntier ≥ 0 alors
    tmp ← unEntier
  sinon
    tmp ← -unEntier
  finsi
  retourner tmp
fin
    
```

Notes

Exemple de programme



```

Programme exemple1
Déclaration a : Entier, b : Naturel
fonction abs (unEntier : Entier) : Naturel
  Déclaration valeurAbsolue : Naturel
début
  si unEntier ≥ 0 alors
    valeurAbsolue ← unEntier
  sinon
    valeurAbsolue ← -unEntier
  finsi
  retourner valeurAbsolue
fin
début
  écrire("Entrez un entier :")
  lire(a)
  b ← abs(a)
  écrire("la valeur absolue de",a," est ",b)
fin
    
```

Lors de l'exécution de la fonction *abs*, la variable *a* et le paramètre *unEntier* sont associés par un passage de paramètre en entrée : La valeur de *a* est copiée dans *unEntier*

Notes



```

fonction minimum2 (a,b : Entier) : Entier
début
  si a ≥ b alors
    retourner b
  fin
  retourner a
fin
fonction minimum3 (a,b,c : Entier) : Entier
début
  retourner minimum2(a,minimum2(b,c))
fin

```

Notes

Les procédures



- ▶ Les procédures sont des sous-programmes qui ne retournent
- ▶ Par contre elles admettent des paramètres avec des passages :
 - ▶ en entrée, préfixés par **Entrée** (ou **E**)
 - ▶ en sortie, préfixés par **Sortie** (ou **S**)
 - ▶ en entrée/sortie, préfixés par **Entrée/Sortie** (ou **E/S**)
- ▶ Généralement le nom d'une procédure est un verbe

Notes

Les procédures



- ▶ On déclare une procédure de la façon suivante :


```

procédure nom de la procédure (
  Déclaration variable(s) locale(s)
début
  instructions de la procédure
fin
)

```
- ▶ Et on appelle une procédure comme une fonction, en indiquant son nom suivi des paramètres entre parenthèses

Notes

Exemple de déclaration de procédure



```

procédure calculerMinMax3 ( E a,b,c : Entier; S m,M : Entier )
début
  m ← minimum3(a,b,c)
  M ← maximum3(a,b,c)
fin

```

Notes



Programme *exemple2*

```

Déclaration a : Entier, b : Naturel
procédure echanger ( E/S val1 Entier ; E/S val2 Entier ; )
  Déclaration temp : Entier
  début
    temp ← val1
    val1 ← val2
    val2 ← temp
  fin
début
  écrire(" Entrez deux entiers :")
  lire(a,b)
  echanger(a,b)
  écrire(" a=",a," et b = ",b)
fin
    
```

Notes

Autre exemple de programme



Programme *exemple3*

```

Déclaration entier1,entier2,entier3,min,max : Entier
fonction minimum2 (a,b : Entier) : Entier
  ...
fonction minimum3 (a,b,c : Entier) : Entier
  ...
procédure calculerMinMax3 ( E a,b,c : Entier ; S min3,max3 : Entier )
  début
    min3 ← minimum3(a,b,c)
    max3 ← maximum3(a,b,c)
  fin
début
  écrire(" Entrez trois entiers :")
  lire(entier1) ;
  lire(entier2) ;
  lire(entier3)
  calculerMinMax3(entier1,entier2,entier3,min,max)
  écrire(" la valeur la plus petite est ",min," et la plus grande est "
  )
fin
    
```

Notes

Fonctions/procédures récursives



Une fonction ou une procédure récursive est une fonction

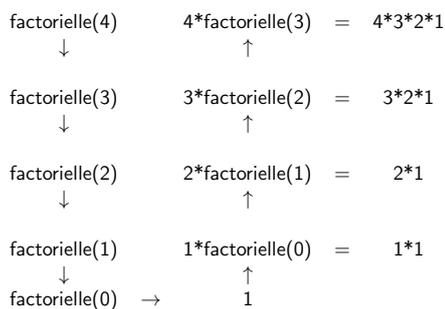
Exemple :

```

fonction factorielle (n : Naturel) : Naturel
début
  si n = 0 alors
    retourner 1
  finsi
  retourner n*factorielle(n-1)
fin
    
```

Notes

Liste des appels



Notes



On peut caractériser un algorithme récursif par plusieurs propriétés :

- ▶ Le mode d'appel : direct/indirect
- ▶ Le nombre de paramètres sur lesquels porte la récursion : arité
- ▶ Le nombre d'appels récursifs : ordre de récursion
- ▶ Le genre de retour :

Notes

Réversivité : mode d'appel



Une fonction récursive s'appellant elle-même a un mode d'appel (ex : factorielle). Si la récursivité est effectuée à travers plusieurs appels de fonctions différentes le mode d'appel est

fonction pair (n : Naturel) : Booléen début si n = 0 alors retourner vrai finsi retourner imPair(n-1) fin	fonction imPair (n : Naturel) : Booléen début si n = 0 alors retourner faux finsi retourner pair(n-1) fin
--	--

Notes

Réversivité : Arité/bien fondé



- ▶ L'arité d'un algorithme est
- ▶ Récursivité bien fondé : Une récursivité dans laquelle les paramètres de la fonction appelée sont «plus simple» que ceux de la fonction appelante. Par exemple factorielle(n) appelle factorielle(n-1).
Exemple de récursivité mal fondée :

GNU : Gnu is not Unix

Notes

Réversivité : Ordre de récursion



- ▶ L'ordre de récursion d'une fonction est le nombre d'appels récursifs lancés à chaque appel de fonction. Par exemple, factorielle(n) ne nécessite qu'un seul appel à la fonction factorielle avec comme paramètre n - 1. C'est donc une fonction récursive d'ordre 1.

Par exemple, la fonction suivante basée sur la formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, est d'ordre 2.

```

fonction comb (Entier p, n) : Entier
début
    si p = 0 ou n = p alors
        retourner 1
    sinon
        retourner comb(p, n - 1) + comb(p - 1, n - 1)
    finsi
fin
    
```

Notes



Le genre d'un algorithme récursif est déterminé par le traitement effectué sur la valeur de retour.

- ▶ Si la valeur de retour est retrouvée sans être modifiée l'algorithme est dit (Par exemple pair/imPair est terminal)
- ▶ Sinon l'algorithme est dit (ex factorielle qui multiplie la valeur de retour par n).

Notes



- ▶ La récursivité peut simplifier considérablement certains problèmes.
- ▶ Un appel de fonction/procédure à un coût non négligeable. Les programmes récursifs sont souvent plus coûteux que leurs homologues non récursifs.

Notes



Complexité

Luc Brun
luc.brun@ensicaen.fr



A partir de travaux de
Habib Abdulrab(Insa de Rouen)

Notes



- ▶ Notion de complexité
- ▶ Comment évaluer la complexité d'un algorithme
- ▶ Exemple de calculs de complexité

Notes



- ▶ Comment évaluer les performances d'un algorithme
- ▶ différents algorithmes ont des coûts différents en termes de
 1. temps d'exécution (nombre d'opérations effectuées par l'algorithme),
 2. taille mémoire (taille nécessaire pour stocker les différentes structures de données pour l'exécution).

Ces deux concepts sont appelé la complexité en temps et en espace de l'algorithme.

Notes



- ▶ La complexité algorithmique permet de mesurer les performances d'un algorithme et de le comparer avec d'autres algorithmes réalisant les même fonctionnalités.
- ▶ La complexité algorithmique est un concept fondamental pour tout informaticien, elle permet de déterminer si :
 - ▶ un algorithme *a* est meilleur qu'un algorithme *b* et
 - ▶ s'il est *optimal* ou
 - ▶ s'il ne doit pas être utilisé...

Notes



Le temps d'exécution d'un programme dépend :

- 1.
- 2.
3. (processeur,mémoire),
4. de la complexité en temps de l'algorithme «abstrait» sous-jacent.

Notes



Soit *n* la taille des données du problème et *T(n)* le temps d'exécution de l'algorithme. On distingue :

- ▶ $T_{max}(n)$:
Correspond au temps maximum pris par l'algorithme pour un problème de taille *n*.
- ▶ $T_{moy}(n)$: Temps moyen d'exécution sur des données de taille *n* (⇒ suppositions sur la distribution des données).

$$T_{moy}(n) = \sum_{i=1}^r p_i T_{s_i}(n)$$

- ▶ p_i probabilité que l'instruction s_i soit exécutée,
- ▶ $T_{s_i}(n)$: temps requis pour l'exécution de s_i .

Notes



Règles générales :

1. le temps d'exécution (t.e.) d'une affectation ou d'un test est considéré comme constant c ,
2. Le temps d'une séquence d'instructions est la somme des t.e. des instructions qui la composent,
3. le temps d'un branchement conditionnel est égal au t.e. du test plus le max des deux t.e. correspondant aux deux alternatives (dans le cas d'un temps max).
4. Le temps d'une boucle est égal à la somme du coût du test + du corps de la boucle + test de sortie de boucle.

Notes

Problèmes du temps d'exécution (1)



► Soit l'algorithme suivant :

Nom: Calcul d'une somme de carrés
Role: Calculer la valeur moyenne d'un tableau
Entrée: n : entier
Sortie: somme : réel
Déclaration: i : Naturel
début
 somme ← 0.0
pour i ← 0 à n-1 **faire**
 somme ← somme+i*i
finpour
fin

Notes

Problèmes du temps d'exécution (2)



$$T_{moy}(n) = T_{max}(n) = c_1 + c_1 + n(c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_1) = 2c_1 + n \left(\sum_{i=1}^5 c_i \right)$$

avec c_1 : affectation, c_2 : incrémentation, c_3 test, c_4 addition, c_5 multiplication.

Trop précis ⇒ 1. Faux, 2. Inutilisable.

Notion de complexité : comportement asymptotique du t.e. :

Notes

Estimation asymptotique



Definition

Une fonction f est de l'ordre de g, écrit avec la notation Grand-O comme : $f = \mathcal{O}(g)$, s'il existe une constante c et un entier n_0 tels que :

selon la définition ci-dessus, on aura :

$$f_1(n) = 2n + 3 = \mathcal{O}(n^3), \quad 2n + 3 = \mathcal{O}(n^2), \quad 2n + 3 = \mathcal{O}(n) \text{ au plus juste}$$

$$f_2(n) = 7n^2 = \mathcal{O}(2^n), \quad 7n^2 = \mathcal{O}(n^2) \text{ au plus juste}$$

mais, $7n^2$ N'EST PAS $\mathcal{O}(n)$

Notes

Égalité de complexité



Definition

2 fonctions f et g sont d'égal complexité, ce qui s'écrit comme :
 $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$ (ou $f = \theta(g)$), ssi

exemples :

- ▶ $n, 2n$, et $0, 1n$ sont d'égal complexité : $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(2n) = \mathcal{O}(0, 1n)$
- ▶ $\mathcal{O}(n^2)$ et $\mathcal{O}(0, 1n^2 + n)$ sont d'égal complexité : $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(0, 1n^2 + n)$
- ▶ par contre : $2n$ et n^3 se sont PAS d'égal complexité :
 $\mathcal{O}(2n) \neq \mathcal{O}(n^3)$

Definition

une fonction f est de plus petite complexité que g , ce qui s'écrit comme : $\mathcal{O}(f) < \mathcal{O}(g)$, ssi $f = \mathcal{O}(g)$ mais

exemples :

- ▶ $100n$ est de plus petite complexité que $0, 01n^2$: $\mathcal{O}(100n) < \mathcal{O}(0, 01n^2)$

93 / 298

Propriétés



- ▶ Réflexivité :

$$g = \mathcal{O}(g)$$

- ▶ Transitivité :

$$\text{si } f = \mathcal{O}(g) \text{ et } g = \mathcal{O}(h) \text{ alors } f = \mathcal{O}(h)$$

- ▶ Produit par un scalaire : $\mathcal{O}(\lambda f) = \mathcal{O}(f), \lambda > 0$.
- ▶ Somme et produit de fonctions :
- ▶ $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(\max\{f, g\})$
- ▶ $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$

94 / 298

Notes

Notes

Complexité d'une boucle



pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**

s

finpour

avec $s = \mathcal{O}(1)$.

- ▶ Temps de calcul de s : $T_s = C$
- ▶ Nombre d'appels de s : n
- ▶ Temps de calcul total : $T(n) = nT_s = \mathcal{O}(n)$
- ▶ Complexité : $\mathcal{O}(n)$

95 / 298

Notes

Boucles imbriquées



Théorème

La complexité de p boucles imbriquées de 1 à n ne contenant que des instructions élémentaires est en

Preuve:

- ▶ vrai pour $p = 1$,
- ▶ supposons la ppt vrai à l'ordre p . Soit :
pour $i \leftarrow 1$ à n **faire**
instruction
finpour
où **instruction** contient p boucles imbriquées.
- ▶ Soit $T_{inst}(n)$ le temps d'exécution de **instruction** et $T(n)$ le temps total.
- ▶ $T(n) = nT_{inst}(n)$ avec $T_{inst}(n) \leq Cn^p$ pour $n \geq n_0$ (par hypothèse).

96 / 298

Notes

- ▶ $T(n) \leq Cn^{p+1} \Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^{p+1})$

```

h ← 1
tant que h ≤ n faire
  h ← 2*h
fin tant que
    
```

- ▶ Test, multiplication, affectation : $\mathcal{O}(1)$: $T = C$
- ▶ Nombre d'itérations : $\log_2(n)$.
- ▶ Temps de calcul : $T(n) = C \log_2(n) = \mathcal{O}(\log_2(n))$

Notes

Complexité d'un algorithme récursif (1)

```

Soit l'algorithme :
fonction factorielle (n : Naturel) : Naturel
début
  si n = 0 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner n*factorielle(n-1)
  finsi
fin
    
```

Notes

Complexité d'un algorithme récursif (2)

c_1 test, c_2 multiplication.

- ▶ $T(0) = c_1$
- ▶ $T(n) = c_1 + c_2 + T(n-1)$
 $\Rightarrow T(n) = nc_2 + (n+1)c_1$

Soit $C = 2 \max\{c_1, c_2\}$

$$T(n) \leq Cn + c_1 = \mathcal{O}(n)$$

Complexité en $\mathcal{O}(n)$.

Les calculs de complexité d'algorithmes récursifs induisent naturellement des suites.

Notes

Algorithmes récursifs en $\mathcal{O}(\log_2(n))$ (1)

Théorème

Soient, *debut*, *fin* et $n = fin - debut$ trois entiers. La complexité de l'algorithme ci dessous est en $\mathcal{O}(\log_2(n))$.

procédure *f* (*debut*, *fin*)

Déclaration Entier *milieu*

début

milieu ← $\frac{debut + fin}{2}$

si *fin*-*milieu* > 1 et *milieu*-*debut* > 1 **alors**

s

sinon

si *test* **alors**

f (*debut*, *milieu*)

sinon

f (*milieu*, *fin*)

finsi

finsi

fin

Notes



Notes

► Tests, s : $\mathcal{O}(1)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + C$$



Notes

procédure f (debut,fin)

Déclaration Entier milieu

début

milieu $\leftarrow \frac{\text{debut} + \text{fin}}{2}$

si fin-milieu > 1 et milieu-debut > 1 **alors**

s_1

sinon

pour i \leftarrow -1 à n **faire**

s_2

finpour

f(début,milieu)

f(milieu,fin)

finsi

fin



Notes

► Tests, s : $\mathcal{O}(1)$

► Boucle : $\mathcal{O}(n)$.

$$T(n) = n + 2T\left(\frac{n}{2}\right)$$

On a de plus :



Notes

► $\mathcal{O}(1)$: temps constant,

► $\mathcal{O}(\log(n))$: complexité logarithmique (*Classe L*),

► $\mathcal{O}(n)$: complexité linéaire (*Classe P*),

► $\mathcal{O}(n \log(n))$

► $\mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n^3), \mathcal{O}(n^p)$: quadratique, cubique, polynomiale (*Classe P*),

► $\mathcal{O}(p^n)$ complexité exponentielle (*Classe EXPTIME*),..

► $\mathcal{O}(n!)$ complexité factorielle.

$n \rightarrow 2n$.

$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log_2(n))$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \log_2(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(2^n)$
t	$t + 1$	$2t$	$2t + 2n$	$4t$	$8t$	t^2

	1	$\log_2(n)$	n	$n \log_2(n)$	n^2	n^3	2^n
$n = 10^2$	$1\mu s$	$6\mu s$	$0.1ms$	$0.6ms$	$10ms$	$1s$	$4 \times 10^{16} a$
$n = 10^3$	$1\mu s$	$10\mu s$	$1ms$	$10ms$	$1s$	$16.6min$	∞
$n = 10^4$	$1\mu s$	$13\mu s$	$10ms$	$0.1s$	$100s$	$11,5j$	∞
$n = 10^5$	$1\mu s$	$17\mu s$	$0.1s$	$1.6s$	$2.7h$	$32a$	∞
$n = 10^6$	$1\mu s$	$20\mu s$	$1s$	$19.9s$	$11,5j$		∞

Notes

Limites de la complexité

- ▶ La complexité est un résultat asymptotique : un algorithme en $\mathcal{O}(Cn^2)$ peut être plus efficace qu'un algorithme en $\mathcal{O}(C'n)$ pour de petites valeurs de n si $C \ll C'$,
- ▶ Les traitements ne sont pas toujours linéaires \Rightarrow Il ne faut pas supposer d'ordres de grandeur entre les différentes constantes.

Notes

Conseils

Qualités d'un algorithme :

1. Maintenable (facile à comprendre, coder, déboguer),
2. Rapide

Conseils :

1. Privilégier le point 2 sur le point 1 uniquement si on gagne en complexité.
2. «ce que fait» l'algorithme doit se lire lors d'une lecture rapide : Une idée par ligne. Indenter le programme.
3. Faire également attention à la précision, la stabilité et la sécurité.

La rapidité d'un algorithme est un élément d'un tout définissant les qualités de celui-ci.

Notes

Algorithmique

Les tableaux

Nicolas Delestre et Michel Mainguenaud
 {Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr

Adapté pour l'ENSICAEN par

Luc Brun
 luc.brun@ensicaen.fr

Notes



- ▶ Pourquoi les tableaux ?
- ▶ Les tableaux à une dimension
- ▶ Les tableaux à deux dimensions
- ▶ Les tableaux à n dimensions

Pourquoi les tableaux ?



- ▶ Imaginons que l'on veuille calculer la moyenne des notes d'une promotion, quel algorithme allons nous utiliser ?
- ▶ Pour l'instant on pourrait avoir l'algorithme suivant :

```

Nom: moyenne
Role: Affichage de la moyenne des notes d'une promo saisies par le prof
Entrée: -
Sortie: -
Déclaration: somme, nbElevés, uneNote, i : Naturel
début
  somme ← 0.0
  écrire(Nombre d'élèves :)
  lire(nbElevés)
  pour i ← 0 à nbElevés faire
    écrire("Note de l'élève numéro",i," :")
    lire(note)
    somme ← somme+note
  finpour
fin
écrire("Moyenne des notes :",somme/nbElevés)

```

Pourquoi les tableaux ?



- ▶ Imaginons que l'on veuille toujours calculer la moyenne des notes d'une promotion mais en gardant en mémoire toutes les notes des étudiants (pour par exemple faire d'autres calculs tels que l'écart type, la note minimale, la note maximale, etc.)
- ▶ Il faudrait alors déclarer autant de variables qu'il y a d'étudiants, par exemple en supposant qu'il y ait 3 étudiants, on aurait l'algorithme suivant :

```

procédure moyenne ()
  Déclaration somme, note1, note2, note3 : Naturel
début
  écrire(" Les notes des trois étudiants :")
  lire(note1) ;
  lire(note2) ;
  lire(note3) ;
  somme ← note1+note2+note3
  écrire(" La moyenne est de :",somme/3)
fin

```

Pourquoi les tableaux ?



- ▶ Le problème est que cet algorithme ne fonctionne que pour 3 étudiants
- ▶ Si on en a 10, il faut déclarer 10 variables
- ▶ Si on en a n, il faut déclarer n variables ... ce n'est pas réaliste
- ▶ Il faudrait pouvoir par l'intermédiaire d'une seule variable ... c'est le rôle des tableaux

Les tableaux à une dimension



- ▶ C'est ce que l'on nomme un type complexe (en opposition aux types simples vus précédemment)
- ▶ Le type défini par un tableau est fonction :
 - ▶ maximal que peut contenir le tableau
 - ▶ des éléments que peut contenir le tableau
- ▶ Par exemple un tableau d'entiers de taille 10 et un tableau d'entiers de taille 20 sont deux types différents
- ▶ On peut utiliser directement des variables de type tableau, ou définir de nouveau type à partir du type tableau
- ▶ On utilise un type tableau via la syntaxe suivante :
- ▶ **Tableau**[*intervalle*] de *type des éléments stockés par le tableau* où *intervalle* est un intervalle sur un type simple **dénombrable** avec des bornes **constantes**

113 / 298

Notes

Les tableaux à une dimension



Par exemple :

- ▶ **Type Notes = Tableau[1..26] de Naturel**
- ▶ défini un nouveau type appelé Notes, qui est un tableau de 26 naturels
- ▶ a : Notes, déclare une variable de type Notes
- ▶ b : **Tableau[1..26] de Naturel**
- ▶ déclare une variable de type tableau de 26 Naturels
- ▶ a et b sont de même type
- ▶ c : **Tableau['a'..'z'] d'Entier**
- ▶ déclare une variable de type tableau de 26 entiers
- ▶ a et c sont de types différents

114 / 298

Notes

Les tableaux à une dimension



- ▶ Ainsi l'extrait suivant d'algorithme :

```
tab : Tableau['a'..'c'] de Réel
tab['a'] ← 2.5
tab['b'] ← -3.0
tab['c'] ← 4.2
```
- ▶ ... peut être présentée graphiquement par :

115 / 298

Notes

Les tableaux à une dimension



- ▶ On accède (en lecture ou en écriture) à la $i^{\text{ème}}$ valeur d'un tableau en utilisant la syntaxe suivante :
 - ▶ *nom de la variable*[*indice*]
- ▶ Par exemple si *tab* est un tableau de 10 entiers (**Tableau**[1..10] d'Entier)
 - ▶ `tab[2] ← -5`, met la valeur -5 dans la 2^{ème} case du tableau
 - ▶ En considérant le cas où *a* est une variable de type Entier,
 - ▶ `a ← tab[2]`, met la valeur de la 2^{ème} case du tableau *tab* dans *a*, c'est-à-dire 5
 - ▶ `lire(tab[1])` met l'entier saisi par l'utilisateur dans la première case du tableau
 - ▶ `ecrire(tab[1])` affiche la valeur de la première case du tableau

116 / 298

Notes

Exemple



Nom: moyenne

Role: Affichage de la moyenne des notes d'une promo saisies par le prof

Entrée: -

Sortie: -

Déclaration: somme, nbElevés, i : Naturel, lesNotes : **Tableau**[1..100] de Naturel

début

 somme ← 0

répéter

écrire("Nombre d'élèves (maximum 100) :")

lire(nbElevés)

jusqu'à ce que nbElevés_i0 et nbElevés ≤ 100

pour i ← 1 à nbElevés **faire**

écrire("Note de l'élève numero " ,i," :")

lire(lesNotes[i])

finpour

pour i ← 1 à nbElevés **faire**

 somme ← somme + lesNotes[i]

finpour

117 / 298

fin

Notes

Remarques



- ▶ Un tableau possède un nombre maximal d'éléments défini lors de l'écriture de l'algorithme (les bornes sont des constantes explicites, par exemple 10, ou implicites, par exemple MAX)
- ▶ ce nombre d'éléments ne peut être fonction d'une variable
- ▶ Par défaut si aucune initialisation n'a été effectuée les cases d'un tableau possèdent
- ▶ Le nombre d'éléments maximal d'un tableau est différent du nombre d'éléments significatifs dans un tableau
- ▶ Dans l'exemple précédent le nombre maximal d'éléments est de 100 mais le nombre significatif d'éléments est référencé par la variable nbElevés
- ▶ L'accès aux éléments d'un tableau est direct (temps d'accès constant)
- ▶ Il n'y a pas conservation de l'information d'une exécution du programme à une autre

118 / 298

Notes

Les tableaux à deux dimensions



- ▶ On peut aussi avoir des tableaux à deux dimensions (permettant ainsi de représenter par exemple des matrices à deux dimensions)
- ▶ On déclare une matrice à deux dimensions de la façon suivante :
- ▶ **Tableau**[intervallePremièreDimension][intervalleDeuxièmeDimension] de type des éléments
- ▶ On accède (en lecture ou en écriture) à la j^{ème} ; i^{ème} valeur d'un tableau en utilisant la syntaxe suivante :
- ▶

119 / 298

Notes

Les tableaux à deux dimensions



- ▶ Par exemple si *tab* est défini par **tab** : **Tableau**[1..3][1..2] de Réel)
- ▶ **tab**[2][1] ← -1.2
- ▶ met la valeur -1.2 dans la case 2,1 du tableau
- ▶ En considérant le cas où *a* est une variable de type Réel, **a** ← **tab**[2][1]
- ▶ met -1.2 dans *a*

	1	2
1	7.2	5.4
2	-1.2	2
3	4	-8.5

120 / 298

Notes



- ▶ Attention, le sens que vous donnez à chaque dimension est important et il ne faut pas en changer lors de l'utilisation du tableau
- ▶ Par exemple, le tableau `tab` défini de la façon suivante :
`tab : Tableau[1..3][1..2] de Réel`
`tab[1][1]←2.0; tab[2][1]←-1.2; tab[3][1]←-3.4`
`tab[1][2]←-2.6; tab[2][2]←-2.9; tab[3][2]←-0.5`
 ... peut permettre de représenter l'une des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 3.4 \\ 2.6 & -2.9 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 2.6 \\ 3.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Notes



- ▶ Par extension, on peut aussi utiliser des tableaux à plus grande dimension
- ▶ Leur déclaration est à l'image des tableaux à deux dimensions, c'est-à-dire :
- ▶ **tableau** [*intervalle1*][*intervalle2*]... [*intervallen*] de *type des valeurs*
- ▶ Par exemple :
- ▶ `tab : tableau[1..10][0..9]['a'..'e'] d'Entier`
- ▶ Ainsi que leur utilisation :
- ▶ `tab[2][1]['b'] ←10`
- ▶ `a ←tab[2][1]['b']`

Notes



Les algorithmes de tri

Nicolas Delestre et Michel Mainguenaud
 {Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr
 Adapté pour l'ENSICAEN par
 Luc Brun
 luc.brun@ensicaen.fr



Notes



- ▶ Les algorithmes de tri
- ▶ Définition d'un algorithme de tri,
- ▶ Le tri par minimum successifs,
- ▶ Le tri à bulles,
- ▶ Le tri rapide.
- ▶ Les algorithmes de recherche.
- ▶ Recherche séquentielle non triée
- ▶ Recherche séquentielle triée,
- ▶ Recherche dichotomique.

Notes



- ▶ Les tableaux permettent de stocker plusieurs éléments de même type au sein d'une seule entité,
- ▶ Lorsque le type de ces éléments possède un ordre total, on peut donc les ranger en ordre croissant ou décroissant,
- ▶ Trier un tableau c'est donc ranger les éléments d'un tableau en ordre croissant ou décroissant
- ▶ Dans ce cours on ne fera que des tris en ordre croissant
- ▶ Il existe plusieurs méthodes de tri qui se différencient par leur complexité d'exécution et leur complexité de compréhension pour le programmeur.
- ▶ Examinons tout d'abord : *le tri par minimum successif*

Notes

La procédure échanger



Tous les algorithmes de tri utilisent une procédure qui permet d'échanger (de permuter) la valeur de deux variables Dans le cas où les variables sont entières, la procédure échanger est la suivante :

```

procédure échanger (E/S a,b : Entier)
  Déclaration temp : Entier
début
  temp ← a
  a ← b
  b ← temp
fin

```

Notes

Tri par minimum successif



- ▶ Principe
- ▶ Le tri par minimum successif est
- ▶ Pour une place donnée, on sélectionne l'élément qui doit y être positionné
- ▶ De ce fait, si on parcourt la tableau de gauche à droite, on positionne à chaque fois le plus petit élément qui se trouve dans le sous tableau droit
- ▶ Ou plus généralement : Pour trier le sous-tableau t[i..nbElements] il suffit de positionner au rang i le plus petit élément de ce sous-tableau et de trier le sous-tableau t[i+1..nbElements]

Notes

Tri par minimum successif



Par exemple, pour trier <101, 115, 30, 63, 47, 20>, on va avoir les boucles suivantes :

- ▶ i=1 <101, 115, 30, 63, 47, 20>
- ▶ i=2 <20, 115, 30, 63, 47, 101>
- ▶ i=3 <20, 30, , 63, 47, 101>
- ▶ i=4 <20, 30, , 63, 115, 101>
- ▶ i=5 <20,30, 47, 63, 115, 101>
- ▶ Donc en sortie : <20, 30, 47, 63, 101, 115>

Il nous faut donc une fonction qui pour soit capable de déterminer le plus petit élément (en fait l'indice du plus petit élément) d'un tableau à partir d'un certain rang

Notes



fonction indiceDuMinimum (t : Tableau[1..MAX] d'Entier ; rang, nbElements : Naturel) : Naturel

Déclaration i, indiceCherche : Naturel

début

indiceCherche ← rang

pour i ← rang+1 à nbElements **faire**

si t[i] < t[indiceCherche] **alors**

finsi

finpour

retourner indiceCherche

fin

Notes

Tri par minimum successif



► L'algorithme de tri est donc :

procédure effectuerTriParMinimumSuccessif (E/S t : Tableau[1..MAX] d'Entier ; E nbElements : Naturel)

Déclaration i, indice : Naturel

début

pour i ← 1 à nbElements-1 **faire**

indice ← indiceDuMinimum(t,i,nbElements)

si i ≠ indice **alors**

echanger(t[i],t[indice])

finsi

finpour

fin

Notes

Complexité



► Recherche du minimum sur un tableau de taille n
→ Parcours du tableau.

Complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

Notes

Le tri à bulles



► Principe de la méthode : Sélectionner le minimum du tableau en parcourant le tableau de la fin au début et en échangeant tout couple d'éléments consécutifs non ordonnés.

Notes

Tri à bulles : Exemple



Par exemple, pour trier <101, 115, 30, 63, 47, 20>, on va avoir les boucles suivantes :

- ▶ $i=1$ <101, 115, 30, 63, 47, 20>
- ▶ <101, 115, 30, 63, 20, 47>
- ▶ <101, 115, 30, 20, 63, 47>
- ▶ <101, 115, 20, 30, 63, 47>
- ▶ <101, 20, 115, 30, 63, 47>
- ▶ $i=2$ <20, 101, 115, 30, 63, 47>
- ▶ $i=3$ <20, 30, 101, 115, 47, 63>
- ▶ $i=4$ <20, 30, 47, 101, 115, 63>
- ▶ $i=4$ <20, 30, 47, 63, 101, 115>
- ▶ Donc en sortie : <20, 30, 47, 63, 101, 155>

133 / 298

Notes

Tri à bulles : l'algorithme



procédure TriBulles (E/S t : Tableau[1..MAX]
d'Entiers,nbElements : Naturel)

Déclaration i, k : Naturel

début

pour $i \leftarrow 0$ à nbElements-1 **faire**
 pour $k \leftarrow$ nbElements-1 à $i+1$ **faire**
 si $t[k] < t[k-1]$ **alors**

fini

finpour

finpour

fin

134 / 298

Notes

Tri à bulles : Complexités



- ▶ Nombre de tests (moyenne et pire des cas) :

Complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

- ▶ Nombre d'échanges (pire des cas) :

$$E(n) = n - 1 + n - 2 + \dots + 1 \rightarrow \mathcal{O}(n^2)$$

- ▶ Nombre d'échange (en moyenne) $\mathcal{O}(n^2)$ (calcul plus compliqué)

En résumé : complexité en $\mathcal{O}(n^2)$.

135 / 298

Notes

Le tri rapide



- ▶ Principe de la méthode
- ▶ Choisir un élément du tableau appelé *pivot*,
- ▶ Ordonner les éléments du tableau par rapport au pivot
- ▶ Appeler récursivement le tri sur les parties du tableau
- ▶ à
- ▶ à droite du pivot.

136 / 298

Notes

procédure partition (E/S t : Tableau[1..MAX] d'Entier ;

E : premier, dernier : **Naturel**, S : indPivot : **Naturel**)

Déclaration compteur, i : **Naturel**, pivot : **Entier**

début

compteur ← premier

pivot ← t[premier]

pour i ← premier+1 à dernier **faire**

si t[i] < pivot **alors**

compteur ← compteur+1

échange(t[i], t[compteur]);

fin

finpour

échanger(T, compteur, premier)

indPivot ← compteur

fin

Notes

Exemple de partition

6 ^(c)	3 ⁽ⁱ⁾	0	9	1	7	8	2	5	4
6	3 ^(i,c)	0	9	1	7	8	2	5	4
6	3	0 ^(i,c)	9	1	7	8	2	5	4
6	3	0 ^(c)	9 ⁽ⁱ⁾	1	7	8	2	5	4
6	3	0 ^(c)	9	1 ⁽ⁱ⁾	7	8	2	5	4
6	3	0			7	8	2	5	4
6	3	0	1 ^(c)	9	7	8	2 ⁽ⁱ⁾	5	4
6	3	0	1	2 ^(c)	7	8	9 ⁽ⁱ⁾	5	4
6	3	0	1	2	5 ^(c)	8	9	7 ⁽ⁱ⁾	4
6	3	0	1	2	5	4 ^(c)	9	7	8 ⁽ⁱ⁾
4	3	0	1	2	5	6 ^(c)	9	7	8

Notes

Le tri rapide

► Algorithme :

procédure triRapide (E/S t : Tableau[1..MAX] d'Entier ; gauche, droit :

Naturel)

Déclaration pivot : **Naturel**

début

si gauche < droite **alors**

partition(t, gauche, droite, pivot)

triRapide(t, gauche, pivot-1)

triRapide(t, pivot+1, droite)

fin

fin

Notes

Exemple

Dans l'exemple précédent on passe de : <6,3,0,9,1,7,8,2,5,4> à <4,3,0,1,2,6,8,9,7> et on se relance sur :

► <4,3,0,1,2> et

► <8,9,7>

Notes

- ▶ Le tri par rapport au pivot nécessite de parcourir le tableau. On relance ensuite le processus sur les deux sous tableaux à gauche et à droite du pivot.

$$T(n) = n + T(p) + T(q)$$

p, q taille des sous tableaux gauche et droits.

Dans le meilleur des cas $p = q$ et :

Posons $n = 2^p$. On obtient :

$$\begin{aligned} T(p) &= 2^p + 2T(p-1) \\ &= p2^p + 2^p \end{aligned}$$

En repassant en n : $T(n) = \log_2(n).n + n$. La complexité est donc en $\mathcal{O}(n \log_2(n))$ (dans le meilleur des cas).

141 / 298

Notes

Algorithmes de recherche

- ▶ Recherche dans un tableau non trié.

fonction rechercheNonTrie (tab : Tableau[0..MAX] d'Éléments, x : Élément) : Naturel

Déclaration i : Naturel

début

i ← 0

tant que (i ≤ MAX) et (tab[i] ≠ x) **faire**

i ← i+1

fin tant que

si i = MAX+1 **alors**

retourner MAX+1

fin si

retourner i

fin

142 / 298

Notes

Algorithmes de recherche

- ▶ Recherche séquentielle dans un tableau trié.

fonction rechercheSeqTrie (tab : Tableau[0..MAX+1] d'Éléments, x : Élément) : Naturel

Déclaration i : Naturel

début

si x < tab[0] **alors**

retourner MAX + 1

fin si

i ← 0

tant que x > tab[i] **faire**

i ← i+1

fin tant que

si x = tab[i] **alors**

retourner i

fin si

retourner MAX + 1

fin

143 / 298

Notes

Algorithme de recherche

fonction rechercheDicoTrie (tab : Tableau[0..MAX] d'Éléments, x : Élément) : Naturel

Déclaration gauche, droit, milieu : Naturel

début

gauche ← 0; droit ← MAX

tant que gauche ≤ droit **faire**

si x = tab[milieu] **alors** retourner milieu **fin si**

si x < tab[milieu] **alors**

droit ← milieu-1

sinon

gauche ← milieu+1

fin si

fin tant que

retourner MAX+1

fin

144 / 298

Notes



- ▶ On cherche 101 dans <20, 30, 47, 63, 101, 115>.
- ▶ $i=1$ <20(g), 30, 47(m), 63, 101, 115(d)>.
- ▶ $i=2$ <20, 30, 47, 63(g), 101(m), 115(d)>.
- ▶



Types Abstraites de Données (TAD)

Nicolas Delestre et Michel Mainguenaud
 {Nicolas.Delestre,Michel.Mainguenaud}@insa-rouen.fr
 Adapté pour l'ENSI CAEN par
 Luc Brun
 luc.brun@ensicaen.fr





- ▶ Définition d'un type abstrait
- ▶ Définition des enregistrements
- ▶ Bestiaire des types abstraits
 - ▶ Les ensembles,
 - ▶ Les listes,
 - ▶ Les files,
 - ▶ Les piles,
 - ▶ Les arbres,
 - ▶ Les arbres binaires,
 - ▶ Les arbres binaires de recherche,
 - ▶ Les arbres parfaits et les tas



- ▶
 1. un ensemble de données organisé et
 2. d'opérations sur ces données.
- ▶ Il est défini d'une manière indépendante de la représentation des données en mémoire. On étudie donc le concept en termes de fonctionnalités.
- ▶ Cette notion permet l'élaboration des algorithmes :
 1. en faisant appel aux données et aux opérations abstraites du TAD (couche supérieure),
 2. suivi d'un choix de représentation du TAD en mémoire (couche inférieure).

- ▶ Le codage de la couche supérieure donne des programmes abstraits, compréhensibles et réutilisables.
- ▶ Le codage de la couche inférieure implante un choix de la représentation du TAD en mémoire.

😊 La couche supérieure reste inchangée si on change cette couche inférieure.

Les Enregistrements

Le codage de types abstraits dans la couche inférieure nécessite souvent des types complexes.

- ▶ En plus des types élémentaires : Entiers, Réels, Caractères..., on peut définir des nouveaux types (des types composites) grâce à la notion d'enregistrement.
- ▶ Remarque :

dans les langages à Objets remplace avantageusement la notion d'enregistrement.

Définition d'un enregistrement

- ▶ Un enregistrement est défini par n attributs munis de leurs types, n > 0. Un attribut peut être de type élémentaire ou de type enregistrement.
- ▶ Syntaxe (en pseudo langage algorithmique) :

```
Type <nomEnregistrement> = Enregistrement
début
    <Attribut1> : <type de Attribut1>;
    :
    <Attributn> : <type de Attributn>;
fin
```

Exemple

On peut créer le type Personne, défini par un nom, un prénom, et un age.

```
Type Personne = Enregistrement
début
    nom : ChaîneDeCaractères;
    prénom : Chaîne;
    age : Entier;
fin
```



- ▶ Il est possible d’imbriquer sans limitation des enregistrements les uns dans les autres.
- ▶ Exemple : On peut définir l’adresse (par un numéro, une rue, une ville et un code postal) comme un nouvel enregistrement, et l’ajouter comme un attribut supplémentaire à l’enregistrement Personne.

Notes

Exemple



Type Adresse = Enregistrement

début

numero : Entier;
codePostal : Entier;
rue,ville : ChaîneDeCaractères;

fin

Type Personne = Enregistrement

début

nom,prenom : ChaîneDeCaractères;
age : Entier;

fin

Notes

Accès aux attributs



- ▶ L'accès aux attributs d'un enregistrement se fait, attribut par attribut,
- ▶ Exemple :
Var p , p1 : personne;
p.nom :='Dupont';
p.prenom :='Jean';
p.adresse.rue :='Place Colbert';

Notes

Les principaux types abstraits de données



- ▶ Classification suivant :
 1. La présence d'un ordre parmi les éléments du TAD,
 2. L'existence d'une méthode spécifique d'insertion/suppression.

On distingue notamment :

- ▶ Les listes : Ensemble ordonné, sans notion de priorité d'entrée et de sortie.
- ▶ Les piles (FILO : First in Last Out).
- ▶ Les files (FIFO : First in First out)

Notes

Les ensembles



Opérations :

- ▶ `créer()` : Ensemble.
 - ▶ `vide(e : Ensemble)` : Booléen
 - ▶ `ajouter(x : Élément, e : Ensemble)` : Booléen
 - ▶ `supprimer(x : Élément, e : Ensemble)` : Booléen
 - ▶ `appartient(x, Élément, e : Ensemble)` : Booléen
- Plus en option :
- ▶ `tête(e : Ensemble)`.
Positionne un index sur un élément de l'ensemble,
 - ▶ `suivant(e : Ensemble)` : Booléen.
Choisi aléatoirement un élément non préalablement parcouru.
 - ▶ `courant(e : Ensemble)` : Élément.
Renvoie l'élément courant.

157 / 298

Notes

Différence



Calcule la différence de deux ensembles. Le paramètre de sortie `diff` est supposé vide.

procédure `différence (E e1, e2 : Ensemble, S diff : Ensemble)`

Déclaration `x : Element`

début

si `vide(e1)` **alors**

retourner `diff`

finsi

`tête(e1)`

répéter

`x ← courant(e1)`

si `non appartient(x, e2)` **alors**

`ajouter(x, diff)`

finsi

jusqu'à ce que

fin

158 / 298

Notes

Un exemple de codage d'ensemble



- ▶ Un tableau de taille `MAX`,
- ▶ un index sur l'élément courant,
- ▶ un index sur le dernier élément.

Type Ensemble = **Enregistrement**

début

`courant : Naturel ;`

`dernier : Entier ;`

`élément : Tableau[0..MAX] d'Éléments ;`

fin

159 / 298

Notes

Un début de codage (1)



fonction `créer ()` : Ensemble

Déclaration `ens : Ensemble`

début

`ens.courant ← 0`

`ens.dernier ← -1`

retourner `ens`

fin

fonction `vide (e : Ensemble)` : Booléen

Déclaration -

début

retourner `e.dernier == -1`

fin

160 / 298

Notes

fonction ajouter (x : Élément, e : Ensemble) : Booléen

Déclaration -

début

si $e.dernier = MAX$ **alors**

retourner faux

finsi

$e.dernier \leftarrow e.dernier+1$

élément[$e.dernier$] $\leftarrow x$

retourner vrai

fin

161 / 298

Notes

Un début de codage (3)

fonction supprimer (x : Élément, e : Ensemble) : Booléen

Déclaration i : Naturel

début

si vide(e) **alors**

retourner faux

finsi

$i \leftarrow 0$

tant que $i \leq e.dernier$ **faire**

si $e.élément[i]=x$ **alors**

si $i \neq e.dernier$ **alors**

finsi

$e.dernier \leftarrow e.dernier-1$

sinon

$i \leftarrow i+1$

finsi

fintantque

retourner faux

fin

162 / 298

Notes

Les listes

Un ensemble ordonné d'éléments (notion de premier, second...).

Opérations :

- ▶ créer() : Liste,
- ▶ vide(l : Liste) : Booléen,
- ▶ ajouter(x : Élément, l : Liste) : Booléen (à préciser).
- ▶ supprimer(x : Élément, l : liste) : Booléen

Opérations de parcourt :

- ▶ tête(l : Liste)
- ▶ courant(l : Liste) : Élément
- ▶ suivant(l : Liste) : Booléen (faux si vide)
- ▶ ajouterCourant(x : Élément, l : Liste)
- ▶ pré conditions :

163 / 298

Notes

Exemple

fonction appartient (x : Élément, l : Liste) : Booléen

Déclaration current : Élément

début

si vide(l) **alors**

retourner faux

finsi

tête(l)

répéter

si current= x **alors**

retourner vrai

finsi

jusqu'à ce que non suivant(l)

retourner faux

fin

164 / 298

Notes



Identique à celle vue pour les ensembles.

Type Ensemble = Enregistrement

début

courant : Naturel ;

dernier : Entier ;

élément : Tableau[0..MAX] d'Éléments ;

fin

La différence apparaît dans les opérations qui doivent maintenir l'ordre des éléments dans la liste.

Notes



▶ Avantages :

▶ Parcours et accès faciles au i^éélément (accès direct).

▶ Possibilité de recherche efficace si la liste est triée (par exemple, recherche dichotomique).

▶ Inconvénients :

▶

Manque de souplesse et d'économie.

▶

Obligation de décaler tous les éléments entre l'élément inséré ou supprimé et le dernier élément.

Notes



▶ Une variable de type pointeur est une variable qui contient une adresse.

▶ Syntaxe (en pseudo langage algorithmique) :

▶ nom : ^i_{type_i} ;

nom ici est une variable de type i_{type_i}

Exemple :

x : ^Entier

▶ nom[^] désigne la valeur (de type i_{type_i}) sur laquelle pointe la variable nom.

▶ NIL est le pointeur vide : une variable x de type pointeur initialisée à NIL signifie que x ne pointe sur rien.

▶ allouer(nom, i_{type_i})

permet d'allouer dynamiquement de l'espace mémoire (de type i_{type_i}) et fait pointer nom sur elle.

▶ libérer ()

permet de libérer l'espace mémoire alloué ci-dessus.

Notes



x : ^Entier

allouer(x,Entier) ;

x[^] ← 1

Notes

Soit l'enregistrement :

Type Personne = **Enregistrement**

début

nom : ChaîneDeCaractères ;

prénom : Chaîne ;

age : Entier ;

fin

► Un pointeur sur enregistrement se définit par :

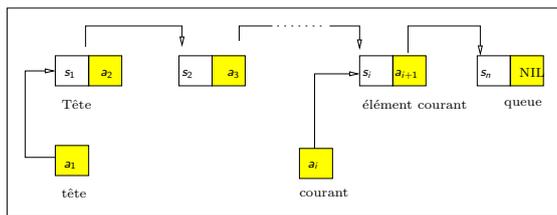
x : ^Personne

► On accède à un attribut comme suit :

x^.age ← 10

Notes

Représentation de listes par cellules



Notes

Codage par cellules

Type Cellule = **Enregistrement**

début

contenu : Élément ;

successeur : PointeurCellule

fin

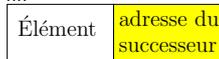
Type Liste = **Enregistrement**

début

tête : PointeurCellule ;

courant : PointeurCellule

fin



Notes

Liste vide, Ajout d'une cellule

procédure ajouter (E : x Élément,
E/S I : Liste)

Déclaration cel : PointeurCellule

début

allouer(cel, cellule)

cel^.contenu ← x

si non vide(l) alors

sinon

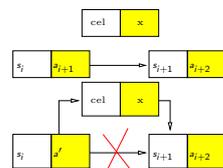
cel^.successeur ← NIL

l.courant ← cel

l.tete ← cel

finsi

fin



fonction vide (l : Liste) :

Booléen

Déclaration -

début

retourner l.tete=NIL

fin

Notes

Suppression d'une cellule



procédure supprimer (E/S | :
Liste)

Déclaration cell : Pointeur-
Cellule

début

si vide(l) alors

retourner

fini

si cell=NIL alors

si l.courant=l.tête alors

libérer(l.tete)

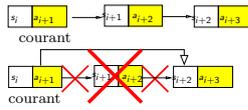
l.tete ← NIL

l.courant ← NIL

fini

sinon

l.courant.suivant ←



173 / 298

libérer(cell)

fini

Représentation des listes par cellules



► Avantages :

- La quantité de mémoire utilisée est exactement ajustée aux besoins.
- Insertion et suppression plus aisées et efficaces que dans le cas de la représentation par des tableaux.
- Inconvénients :
- Accès uniquement séquentiel.

174 / 298

Différents types de listes



► Les listes doublement chaînées.

Type Cellule = Enregistrement

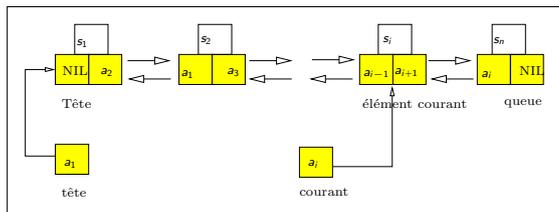
début

contenu : Élément ;

suivant : PointeurCellule

précédent : PointeurCellule

fin

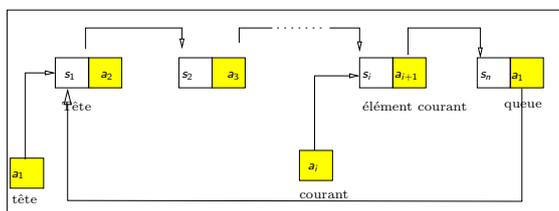


175 / 298

Différents types de listes



- Les listes circulaires :Le pointeur de queue pointe sur la tête.
- Avantages : Gestion plus aisée des suppressions, insertions.



176 / 298

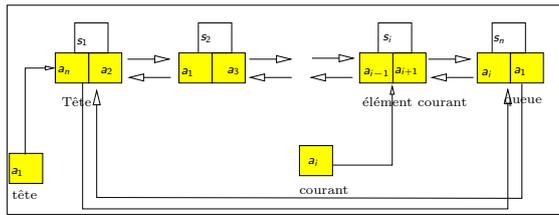
Notes

Notes

Notes

Notes

► Liste doublements chaînées circulaires.



Notes

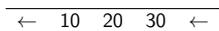
Les piles et les files

- Correspondent comme les liste à une suite d'éléments ordonnés.
- Différences :
- La notion d'élément courant n'existe pas.
- On ajoute et enlève les éléments de la structure dans un ordre précis.

Notes

Les Files

-
- On utilise généralement la notion de file lorsque l'on a un mécanisme d'attente où le premier arrivé est le plus prioritaire (supermarché, imprimante...)



Notes

Files : Opérations

- Opérations :
- créer() : File,
- vide(f : file) : Booléen,
- enfiler(x : Élément, f : File),
- défiler(f : File),
- tête(f : File) : Élément,
- Pré conditions :
- défiler(f) est défini ssi vide(f)=faux
- tête(f) est défini ssi vide(f)=faux

Notes

Type File = Enregistrement

```

début
  début : Naturel ;
  nbÉléments : Naturel ;
  tab : Tableau[1..MAX] d'Éléments
fin
fonction créer () : File
  Déclaration f : File
début
  f.debut ← 0
  nbÉléments ← 0
fin

```

181 / 298

Notes

Plein, Enfiler

```

fonction plein (f : File) : Booléen
  Déclaration -
début
  retourner
fin
procédure enfiler (x : Élément, f : File)
  Déclaration fin : Naturel
début
  si plein(f) alors
    erreur("File pleine")
  fin
  fin ← (f.début+nbÉléments) mod MAX
  f.tab[fin] ← x
  nbÉléments ← nbÉléments+1
fin

```

182 / 298

Notes

Vide, défiler

```

fonction vide (f : File) : Booléen
  Déclaration -
début
  retourner nbÉléments=0
fin
procédure défiler (f : File)
  Déclaration -
début
  si vide(f) alors
    erreur("File Vide")
  fin
  f.debut ←
  nbÉléments ← nbÉléments-1
fin

```

183 / 298

Notes

Exemple

```

-créer()      début : 0      0  1  2  3  4
              nbÉlt : 0      [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

-enfiler(10,20,30,40,50)
              début :      0  1  2  3  4
              nbÉlt :      10 20 30 40 50
              fin  :

-défiler()   début :      0  1  2  3  4
              nbÉlt :      [ ] 20 30 40 50
              fin  :

-enfiler(60) début :      0  1  2  3  4
              fin  :      60 20 30 40 50

```

184 / 298

Notes

Type File = Enregistrement

```

début
  début :PointeurCellule;
  fin : PointeurCellule;
fin
fonction créer () : File
  Déclaration f : File
début
  f.début ← NIL
  f.fin ← NIL
fin

```

185 / 298

Notes

Enfiler

procédure enfiler (x : Élément, f : File)**Déclaration** cell : PointeurCellule

```

début
  allouer(cell,Cellule)
  cell^.contenu ← x
  cell^.suivant ← NIL
  si vide(f) alors
    f.debut ← cell
  sinon

  finsi
  f.fin ← cell
fin

```

186 / 298

Notes

Vide, défiler

procédure défiler (f : File)**Déclaration** cell : PointeurCellule

```

début
  si vide(f) alors
    erreur("File Vide")
  finsi
  si f.debut=f.fin alors
    libérer(f.debut)
    f.debut ← NIL
    f.fin ← NIL
  sinon
    cell ← f.début

    libérer(cell)
  finsi
fin

```

fonction vide (f : File) :

Booléen

187 / 298

Déclaration -**début**

Les Files circulaires

Notes

- ▶ Permet de se passer du pointeur de début.
- ▶ Le début de la liste est la cellule suivante celle pointé par fin.

188 / 298

- ▶ Structure de type LIFO (Last In, First Out).
 - ▶ Dans une pile l'information importante est la dernière entrée.
 - ▶ Permet de mémoriser :
 - ▶ La dernière action effectuée,
 - ▶ La dernière tâche en cours. . .
- Penser à une pile de papier, de dossier. . .

Pile : opérations

- ▶ Opérations
 - ▶ créer() : Pile,
 - ▶ empiler(x : Élément, p : Pile),
 - ▶ dépiler(p : Pile),
 - ▶ sommet(p : Pile) : Élément,
 - ▶ vide(p : Pile) : Booléen.
- ▶ Pré conditions :
 - ▶ dépiler(p) défini ssi : vide(p)=faux,
 - ▶ sommet(p) défini ssi : vide(p)=faux,

Exemple

- ▶ p=créer();

--
- ▶ empiler(3,p);

3
- ▶ empiler(4,p);

4
3
- ▶ x ← tête(p)

4
3

 → x=4.
- ▶ dépiler(p)

3
- ▶ dépiler(p)

Pile : Implémentation par tableaux

```

Type Pile = Enregistrement
début
    nbÉléments : Naturel
    tab : Tableau[0..MAX] de Naturel
fin
fonction créer () : Pile
Déclaration p : Pile
début
    p.nbÉléments ← 0
fin
    
```



```

fonction vide (p : Pile) : Booléen
début
    retourner p.nbÉléments=0
fin
fonction sommet (E p : Pile) : Élément
    Déclaration -
début
    si vide(p) alors
        erreur(" Pile vide")
    fin
    retourner
fin
    
```

Notes

Empiler, dépiler



```

procédure empiler (E x : Élément,E/S p : Pile)
    Déclaration -
début
    si p.nbÉléments=MAX+1 alors
        erreur(" Pile pleine")
    fin

    p.nbÉléments ← p.nbÉléments+1
fin
procédure dépiler (E/S p : Pile)
    Déclaration -
début
    si vide(p) alors
        erreur(" Pile Vide")
    fin
    p.nbÉléments ← p.nbÉléments-1
fin
    
```

Notes

Représentation par liste (chaînée)



```

Type Pile = Enregistrement
début
    tête : PointeurCellule
fin
fonction créer () : Pile
    Déclaration p : Pile
début
    p.tête ← NIL
fin
fonction vide (p :Pile) : Booléen
    Déclaration -
début
    retourner p.tête=NIL
fin
    
```

Notes

Sommet, Empiler



```

fonction sommet (p : pile) : Élément
    Déclaration -
début
    si vide(p) alors
        erreur(" Pile Vide")
    fin
    retourner p.tête^.contenu
fin
procédure empiler (E x : Élément,E/S p : Pile)
    Déclaration cell : PointeurCellule
début
    allouer(cell,Cellule)
    cell.contenu ← x
    cell.suivant ←
    p.tête ←
fin
    
```

Notes

```

procédure dépiler (E/S p : Pile)
  Déclaration cell : PointeurCellule
début
  si vide(p) alors
    erreur(" Pile Vide")
  fin
  cell ←
  p.tête ←
  libérer(cell)
fin
    
```

Les graphes

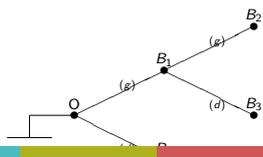
- ▶ Un graphe $G = (V, E)$ est défini par :
- ▶ Un ensemble de sommets V ,
- ▶ un ensemble d'arêtes E .
- ▶ Exemples de graphes :
- ▶ (villes, routes),
- ▶ (machines, réseaux),
- ▶ (Personnes, relations)
- ⋮

Quelques définitions

- ▶ Un chemin :
- ▶ Suite (v_1, \dots, v_n) de sommets tels que :
- ▶ Un chemin simple :
- ▶ chaque v_i apparaît une seule fois.
- ▶ Un cycle :
- ▶ Un chemin fermé ($v_1 = v_n$)
- ▶ Un graphe connexe :
- ▶ Un graphe tel que tout couple de sommets peut être relié par un chemin.

Arbre

- ▶ Un arbre est un graphe G , simple non orienté satisfaisant une des condition (équivalentes) suivante :
- ▶ G est connexe sans cycle (si non connexe on parle de forêt i.e. un ensemble d'arbres),
- ▶ G est sans cycle et l'ajout d'une arête quelconque crée un cycle,
- ▶ G est connexe et n'est plus connecté si l'on retire n'importe qu'elle arête,
- ▶ Tout couples de sommets de G sont reliés par un chemin unique.



Arbres enraciné



- ▶ Arbre enraciné :
arbre dans lequel on distingue un sommet particulier appelé *racine* (induit une orientation naturelle des arêtes).
- ▶ Soient n et n' deux sommets adjacents.
- ▶ n appartient au chemin de n' à la racine
⇒
- ▶ n' appartient au chemin de n à la racine
⇒
- ▶ Un noeud possédant au moins un fils est appelé un *noeud interne*
- ▶ Un noeud ne possédant pas de fils est appelé une
- ▶ n_i est un *ancêtre* de n_j si il existe p tel que $\text{père}^{(p)}(n_j) = n_i$. La racine est l'ancêtre commun de tous les noeuds.

201 / 298

Notes

Arbres : une implémentation



Type PointeurNoeud = \wedge Arbre
Type Arbre = **Enregistrement**
début
contenu : Élément ;
fils : Liste de PointeurNoeud ;
fin

- ▶ Liste de PointeurNoeud : liste où le champ contenu est un pointeur sur un noeud.

202 / 298

Notes

Mesures sur les arbres



- ▶ La *taille* d'un arbre est son nombre de noeuds.
- ▶ $\text{taille}(\text{arbre vide})=0$
- ▶ La *hauteur*(profondeur ou niveau) d'un noeud n est le nombre de noeuds entre celui-ci et la racine.
- ▶ $\text{hauteur}(n)=0$ si n racine, sinon :
- ▶ La hauteur (ou profondeur) d'un arbre est la profondeur maximum de ses noeuds.

203 / 298

Notes

Arbres binaires



- ▶ Tout noeud d'un *arbre binaire* a au plus 2 fils.
- ▶ $B = (O, B_1, B_2)$,
- ▶ O : racine,
- ▶ B_1 sous arbre gauche,
- ▶ B_2 sous arbre droit de B .
- ▶ *Fils gauche*(resp. droit) : racine du sous arbre gauche (resp. droit)
- ▶ $\text{fils_gauche}(O)=a$
- ▶ $\text{fils_droit}(O)=d$

204 / 298

Notes

- Un arbre binaire *dégénéré* ou *filiforme* est un arbre formé de noeuds n'ayant qu'un seul fils.

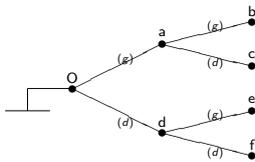


- Un arbre binaire est dit *complet*

si toutes les feuilles ont un même niveau h et si chaque sommet interne a exactement deux fils. Le nombre de noeuds au niveau h est donc égal à 2^h . Le nombre total de noeuds est égal à :

avec h hauteur de l'arbre

Notes

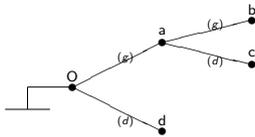


Un arbre complet

- Un arbre binaire de niveau h est parfait

si l'ensemble des noeuds de niveau $h - 1$ forme un arbre binaire complet et si les noeuds de niveau h sont situés le plus à gauche possible.

Notes

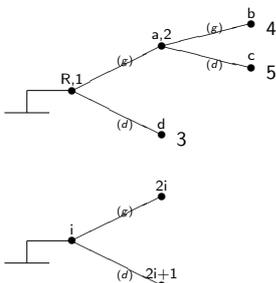


Un arbre parfait.

- Un arbre complet est parfait. On parle d'arbre parfait complet et incomplet.

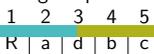
Notes

- On numérote tous les noeuds à partir de la racine, en largeur d'abord de gauche à droite.



Notes

- Codage implicite de la structure.





Notes

- ▶ Hauteurs min et max d'un arbre de n noeuds :
- ▶ hauteur max : arbre dégénéré ($h=n-1$).
- ▶ hauteur min : arbre parfait : ($h = \log_2(n)$)

⇒

Arbre binaires : Opérations-préconditions



Notes

- ▶ Opérations :
- ▶ créer() : ArbreBinaire
- ▶ vide(a : ArbreBinaire) : Booléen
- ▶ contenu(a : ArbreBinaire) : Élément
- ▶ filsG(a : ArbreBinaire) : ArbreBinaire
- ▶ filsD(a : ArbreBinaire) : ArbreBinaire
- ▶ Pré conditions
- ▶ contenu(a) est défini ssi vide(a)=faux
- ▶ filsG(a) est défini ssi vide(a)=faux
- ▶ filsD(a) est défini ssi vide(a)=faux

Implémentation d'arbres binaires



Notes

```

Type Fils = ^Noeud
Type Noeud = Enregistrement
début
  contenu : Élément ;
  filsGauche : Fils ;
  filsDroit : Fils ;
fin
Type ArbreBinaire = Enregistrement
début
  racine : ^Noeud ;
fin

```

Arbre binaire : créer, vide



Notes

```

fonction créer () : ArbreBinaire
  Déclaration a : ArbreBinaire
  début
    a.racine ← NIL
  fin
fonction vide (a : ArbreBinaire) : Booléen
  Déclaration -
  début
    retourner a.racine=NIL
  fin

```

fonction contenu (a : ArbreBinaire) : Élément

Déclaration -

début

retourner a.racine^.contenu

fin

fonction filsG (a : ArbreBinaire) : ArbreBinaire

Déclaration fils : ArbreBinaire

début

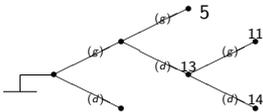
fils.racine ←

retourner fils

fin

Arbre binaires de recherche

- ▶ Pour tout noeud n
- ▶ tous les noeuds du sous arbre de gauche ont une valeur inférieure ou égale à celle de n ,
- ▶ tous les noeuds du sous arbre de droite ont une valeur supérieure à celle de n ,



Arbres binaires de recherche : recherche

fonction cherche (E x : Élément, E a : Arbre) : Booléen

Déclaration -

début

si a.racine=NIL alors

retourner faux

finsi

si a.racine^.contenu=x alors

retourner vrai

finsi

si alors

retourner cherche(x,filsG(a))

finsi

retourner cherche(x,filsD(a))

fin

Arbres binaires de recherche : ajout feuilles

procédure ajoutFeuille (E x : Élément, E/S a : ArbreBinaire)

Déclaration -

début

si $x <$ a.racine^.contenu alors

si a.racine.filsGauche=NIL alors

a.racine.filsGauche ← créerNoeud(x)

sinon

ajoutFeuille(x,a.racine.filsGauche)

finsi

sinon

si a.racine.filsDroit=NIL alors

a.racine.filsDroit ← créerNoeud(x)

sinon

ajoutFeuille(x,a.racine.filsDroit)

finsi

finsi

fin

fonction ajoutRacine (E x : Élément, E a : ArbreBinaire) :
ArbreBinaire
Déclaration arbreMisAJour : ArbreBinaire, n : ^Noeud
début
 allouer(n, Noeud)
 n^.contenu ← x
 arbreMisAJour.racine ← n
 couper(x, a, n^.filsG, n^.filsD)
fin

217 / 298

Notes

Arbre binaire de recherche : couper



procédure couper (E x : Élément, E/S a : ArbreBinaire, E/S
filsG, filsD : Noeud)
début
 si vide(a) alors
 filsG ← NIL
 filsD ← NIL
 retourner
finsi
 si x > a.racine^.contenu alors
 filsG ← a.racine
 couper(x, filsD(a), filsG^.filsDroit, filsD)
sinon
 filsD ← a.racine
 couper(x, filsG(a), filsG, filsD^.filsGauche)
finsi
fin

218 / 298

Notes

Arbres Binaires de Recherche : Suppression
(1)

- ▶ Si l'élément à supprimer n'existe pas on ne fait rien.
- ▶ Si l'élément à supprimer n'a pas de fils gauche, on le remplace par son fils droit.
- ▶ Si l'élément à supprimer n'a pas de fils droit, on le remplace par son fils gauche.
- ▶ Si l'élément à supprimer à deux fils, on le remplace par le plus grand (resp. petit) élément de son sous arbre gauche (resp. droit).

219 / 298

Notes

ABR : Suppression (2)



- ▶ Suppression du Max.
- procédure** supMax (E/S max : Élément, E/S f : Fils)
début
 si f^.filsDroit=NIL alors
 max ← f^.contenu
 f ← f^.filsGauche
sinon

finsi
fin

220 / 298

Notes

procédure supprimer (E x : Élément, E/S f : Fils)

Déclaration max : Élément

début

```

si f=NIL alors
  retourner
finsi
si f^.contenu=x alors
  si f.filsGauche=NIL alors
    libérer(f)
    f ← f^.filsDroit
  retourner
finsi
si f.filsDroit=NIL alors
  libérer(f)
  retourner
finsi
si f.filsGauche=NIL alors
  f ← f^.filsGauche
  retourner
finsi
si f.filsGauche≠NIL alors
  suppmx(
    f^.contenu ←
    si x<f^.contenu alors
      supprimer(x,f^.filsGauche)
    sinon
      supprimer(x,f^.filsDroit)
  )
finsi

```

fin

221 / 298

Notes

Arbres binaires parfaits

- Implémentation par tableaux.

Type ArbreBinaireParfait = **Enregistrement**

début

tab : ^Tableau[1..MAX] d'Éléments

indice : [1..MAX]

nbÉlémentsTotal : [1..MAX]

fin

222 / 298

Notes

Arbre binaire : créer, vide

fonction créer () : ArbreBinaireParfait

Déclaration a : ArbreBinaireParfait

début

allouer(a.tab,Tableau[1..MAX] d'Éléments)

a.nbÉlémentsTotal ← 0

a.indice ← 1

a.racine ← NIL

fin

fonction vide (a : ArbreBinaireParfait) : Booléen

Déclaration -

début

retourner a.nbÉlémentsTotal=0

fin

223 / 298

Notes

Arbre binaire parfaits : contenu, filsG

fonction contenu (a : ArbreBinaireParfait) : Élément

Déclaration -

début

retourner a.tab^[a.indice]

fin

fonction filsG (a : ArbreBinaireParfait) : ArbreBinaireParfait

Déclaration fils : ArbreBinaireParfait

début

si 2*a.indice ≥ a.nbÉlémentsTotal alors

erreur("Pas de fils Gauche")

finsi

fils.tab ← a.tab

fils.indice ←

fils.nbÉlémentsTotal ← a.nbÉlémentsTotal

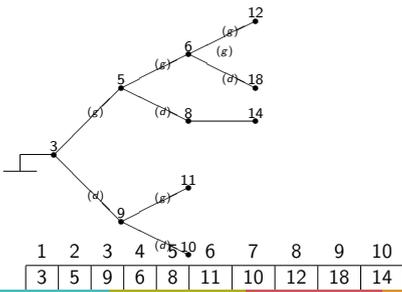
retourner fils

fin

224 / 298

Notes

- ▶ Un tas est un arbre binaire parfait tel que le contenu de chaque noeud est inférieur à celui de ses fils.
- ▶ Le minimum de l'arbre se trouve donc à la racine.



Notes

Ajout d'un élément dans le tas

- ▶ On met l'élément ajouté dans la feuille la plus à droite.
- ▶ On le permute avec son père jusqu'à ce qu'il trouve sa place.
- ▶ p : taille du tas.

procédure ajouter (E/S t : Tableau d'Éléments, p : Naturel, x : Élément)

Déclaration i : Naturel

début

$p \leftarrow p+1$

$t[p] \leftarrow x$

$i \leftarrow p$

tant que ($i > 1$) et ($t[i] < t[i \text{ div } 2]$) **faire**

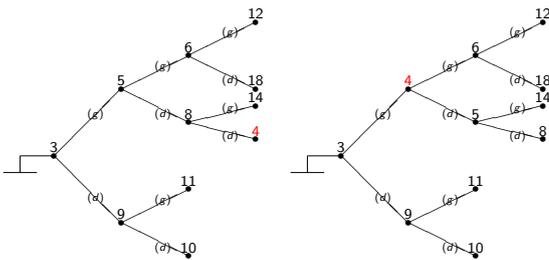
$i \leftarrow i \text{ div } 2$

fin tant que

fin

Notes

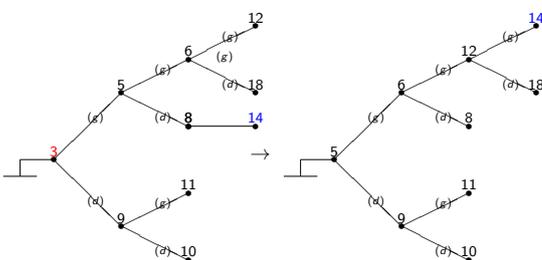
Exemple



Notes

Suppression du minimum

- ▶ On remplace la racine (le minimum) par le dernier élément.
- ▶ On redescend ce dernier élément jusqu'à ce qu'il trouve sa place.



Notes

procédure détruire (E/S t : Tableau d'Éléments, p : Naturel, min : Élément)

Déclaration i, j : Naturel

début

min ← t[1] ; t[1] ← t[p] ; p ← p-1 ; i ← 1

tant que i ≤ (p div 2) **faire**

si (2*i=p) ou (t[2*i] < t[2*i+1]) **alors**

fini

si t[i] ≤ t[j] **alors**

retourner

fini

 échanger(t[i], t[j])

 i ← j

fintantque

fin

Notes

Explications

- ▶ Le sommet le plus à droite a 1 fils ssi p est pair.
- ▶ Demonstration :

i : indice au niveau h-1 du dernier sommet avoir nb=1 ou nb=2 fils.

- ▶ Si p est pair, p div 2 correspond au dernier sommet de niveau h-1 avec 1 fils.
- ▶ Demonstration : $p = \sum_{j=0}^{h-1} 2^j + 2(i-1) + 1 = 2 \left(\sum_{j=0}^{h-2} 2^j + i \right)$
 $p \text{ div } 2 = \sum_{j=0}^{h-2} 2^j + i$: indice de i dans le tableau t.
- ▶ Si p est impair, p div 2 correspond au dernier sommet de niveau h-1 avec 2 fils.
- ▶ Conclusion : p div 2 + 1 est le premier sommet sans fils.

Notes

Complexités et Tri par tas (heapsort)

- ▶ Complexités liées à la hauteur de l'arbre ($\log_2(p)$)
- ▶ Ajout : $\log_2(p)$
- ▶ Détruire : $\log_2(p)$
- ▶ Tri basé sur un algorithme de sélection
- ▶ On ajoute 1 à 1 les éléments du tableau dans le tas (n fois).
- ▶ On retire le minimum du tas pour le mettre dans le tableau (n fois).

Notes

Tris par tas : algorithme

procédure triParTas (t : Tableau[1..n] d'Entiers)

Déclaration p, min : Entiers

début

p ← 0

tant que p < n **faire**

 ajouter(t, p, t[p+1])

Remarque : p incrémenté par ajouter

fintantque

tant que p > 1 **faire**

 détruire(t, p, min)

Remarque : p décrémenté par détruire

 t[p+1] ← min

fintantque

fin

Notes

10	8	11	15	2	3
10	8	11	15	2	3
		11	15	2	3
8	10	11	15	2	3
8	10	11	15	2	3
		11	15	10	3
		3	15	10	11

Tableau initial
ajout de 10
ajout de 8
ajout de 11
ajout de 15
ajout de 2
ajout de 3

Notes

		3	15	10	11
3	8	11	15	10	2
8	10	11	15	3	2
10	15	11	8	3	2
11	15	10	8	3	2
15	11	10	8	3	2
15	11	10	8	3	2

Tas initial
suppression de 2
suppression de 3
suppression de 8
suppression de 10
suppression de 11
Fin du tri.

Notes

► On fait n ajouter et n détruire.

► Utilisation de la formule de Stirling :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

► Donc complexité en $\mathcal{O}(n \log_2(n))$

Notes

Du récursif à l'itératif

Luc Brun

luc.brun@ensicaen.fr

Notes

- ▶ Un seul appel récursif
- ▶ Deux appels récursif
- ▶ Cas de base
- ▶ Avec tests séparés

Notes

237 / 298

Notations

- ▶ `recn` : fonction récursive.
- ▶ `itern` : version itérative de `recn`
- ▶ `A(x)`, `B(x)`, `C(x)`, `D(x)` : fonctions auxiliaires
- ▶ `f(x)`, `g(x)` : transformation de `x` avant l'appel récursif.

Notes

238 / 298

Un seul appel : Cas 1

procédure `rec1` (E x : élément)**début** **si** `C(x)` **alors** `A(x)` `rec1(f(x))` **finsi****fin**

- ▶ Si `C(x)` : $x = 0$ et `f(x)` : $x - 1$,
- ▶ `rec1(4)` implique les appels de

procédure `iter1` (E x : élément)**début** **tant que** `C(x)` **faire** `A(x)` $x \leftarrow f(x)$ **fintantque****fin**

Notes

239 / 298

Un seul appel : Cas 2

procédure `rec2` (E x : élément)**début** **si** `C(x)` **alors** `A(x)` `rec2(f(x))` `B(x)` **finsi****fin**

- ▶ Si `C(x)` : $x = 0$ et `f(x)` : $x - 1$,
- ▶ `rec2(4)` implique les appels de

Notes

240 / 298



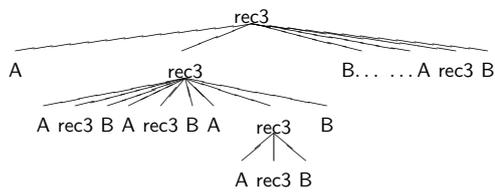
procédure rec3 (E x : élément)
début

fin

- ▶ Si $C(x) : x > 0$, $f(x) : x - 2$ et $B(x) : x \leftarrow x - 1$
- ▶ rec3(4) implique les appels de

Notes

Cas 3 : arbre d'exécution



Notes

Un seul appel : Cas 3



procédure iter3 (E x : élément)
Déclaration p : Pile
début

p ← creer_pile()

répéter

tant que C(x) **faire**

A(x)

empiler(x,p)

x ← f(x)

fin tant que

x ← sommet(p)

depiler(p)

B(x)

jusqu'à ce que vide(p)

fin

Notes

Deux appels : Cas 4



- ▶ Deux appels récursifs avec deux transformations f et g .

procédure rec4 (E x : élément)
début

fin

Notes

► Soit $A'(x) = A(x) \text{REC4}(f(x))$. On se retrouve alors dans le cas 1.

procédure rec4 (E x : élément)

début

tant que C(x) **faire**

A(x)
rec4(f(x))
 $x \leftarrow g(x)$

fantantque

fin

► Soit $B'(x) = x \leftarrow g(x)$. On se retrouve alors dans le cas 3.

procédure iter4 (E x : élément)

Déclaration p : Pile

début

$p \leftarrow \text{creer_pile}()$

répéter

tant que C(x) **faire**

A(x)
empiler(x,p)
 $x \leftarrow f(x)$

fantantque

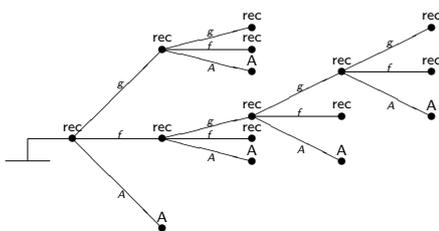
$x \leftarrow \text{sommet}(p)$

depiler(p)

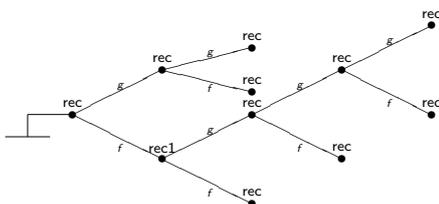
$x \leftarrow g(x)$

jusqu'à ce que vide(p)

fin

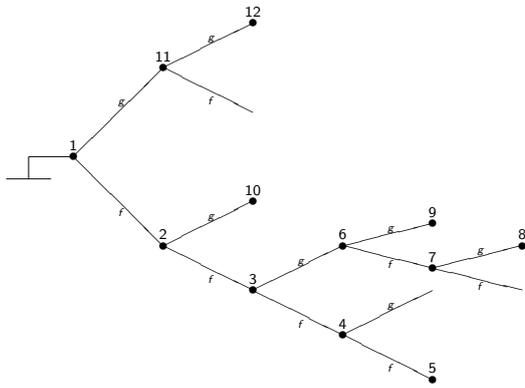


► On oublie les A



► Les parcours des branches gauches sont codés par la boucle intérieure (en f(x))

► Les déplacements droite sont effectués en sortant de la boucle intérieure.



Notes

Cas 4 bis

► On empile x même lorsque $C(x)$ est faux : inutile

procédure iter4 (E x : élément)

Déclaration p : Pile

début

$p \leftarrow \text{creer_pile}()$

répéter

tant que $C(x)$ **faire**

$A(x)$

si $C(g(x))$ **alors**

empiler($g(x)$, p)

finsi

$x \leftarrow f(x)$

fintantque

$x \leftarrow \text{sommet}(p)$

depiler(p)

jusqu'à ce que vide(p)

fin

Notes

Cas 5 : Une fonction entre deux appels récursifs

procédure rec5 (E x : élément)

début

fin

Notes

Cas 5

► Le retour de récursion s'effectue lorsque l'on dépile.

procédure iter5 (E x : élément)

Déclaration p : Pile

début

$p \leftarrow \text{creer_pile}()$

répéter

tant que $C(x)$ **faire**

$A(x)$

empiler(x , p)

$x \leftarrow f(x)$

fintantque

$x \leftarrow \text{sommet}(p)$

depiler(p)

$B(x)$

$x \leftarrow g(x)$

jusqu'à ce que vide(p)

fin

Notes



procédure rec6 (E x : élément)

```

début
  A(x)
  si C1(x) alors
    rec5(f(x))
  finsi
  si C2(x) alors
    rec5(g(x))
  finsi
fin
    
```

Notes

Cas 6



procédure iter6 (E x : élément)

Déclaration p : Pile

```

début
  p ← creer_pile()
  filsGauche ← C1(x)
  répéter
    x ← f(x)
  jusqu'à ce que non
  filsGauche
  si C2(g(x)) alors
    x ← sommet(p)
    empiler(g(x),p)
    depiler(p)
  finsi
  jusqu'à ce que vide(p)
    
```

fin
 Attention, le test C1 est sur x et non sur f(x) (d'où le répéter... jusqu'à).

Notes

Une dernière Variante



procédure rec7 (E x : élément)

```

début
  A(x)
  si C1(x) alors
    rec5(f(x))
  finsi
  B(x)
  si C2(x) alors
    rec5(g(x))
  finsi
fin
    
```

Notes

Iter 7



procédure iter7 (E x : élément)

Déclaration p : Pile, filsGauche : booléen

```

début
  p ← creer_pile()
  filsGauche
  répéter
    répéter
      x ← sommet(p)
      depiler(p)
      B(x)
    jusqu'à ce que C2(x) ou vide(p)
  empiler(x,p)
  filsGauche ← C1(x)
  x ← f(x)
  jusqu'à ce que non
    jusqu'à ce que vide(p)
    
```

fin

Notes

Évaluation d'expressions

Luc Brun

luc.brun@ensicaen.fr



261 / 298

Plan



- ▶ Les différents types d'expressions
- ▶ Expression complètement parenthésée (ECP),
- ▶ Expression préfixée (EPRE),
- ▶ Expression postfixée (EPOST),
- ▶ Expression infixée (EINF).
- ▶ Évaluation d'expressions
 - ▶ postfixée,
 - ▶ complètement parenthésée,
- ▶ Conversion d'expressions
 - ▶ ECP à postfixée,
 - ▶ infixée à postfixée.

262 / 298

Définition d'une expression



- ▶ Définition : Une expression est une suite de variables combinées par un ensemble d'opérateurs avec éventuellement un jeu de parenthèses ouvrantes et fermantes.
- ▶ Exemple :

$$X * (A + B) * (C + D)$$
- ▶ NB : On ne fait pas intervenir de constantes ou de fonctions (petite simplification).
- ▶ L'évaluation d'une expression implique la définition d'un *environnement* (affectation de chaque variable à une valeur).

263 / 298

Les opérateurs



- ▶ Opérateurs binaires
 - ▶ opérateurs arithmétiques

$$\{+, -, *, /\}$$
 - ▶ opérateurs logiques

$$\{<, >, \leq, \geq, \neq, =, \text{et}, \text{ou}\},$$
- ▶ Opérateurs unaires
 - ▶ opérateurs arithmétiques

$$\{\oplus, \ominus\}$$

NB : $\oplus \equiv +$, $\ominus \equiv -$.
 - ▶ opérateurs logiques

$$\text{non.}$$

264 / 298

Notes

Notes

Notes

Notes

► Une expression complètement parenthésée se construit à partir des règles suivantes :

1. Une variable est une ECP,
2. si x et y sont des ECP et β un *opérateur binaire*, alors
3. si x est une ECP et α un *opérateur unaire* alors
4. Il n'y a pas d'autre ECP que celles formées par les 3 règles précédentes.

Grammaire des ECP

► Grammaire BNF (Backus-Naur Form)

$\langle \text{ecp} \rangle \rightarrow (\langle \text{ecp} \rangle \langle \text{optbin} \rangle \langle \text{ecp} \rangle) \mid \langle \text{optun} \rangle \langle \text{ecp} \rangle \mid \langle \text{variable} \rangle$

$\langle \text{optbin} \rangle \rightarrow + \mid - \mid * \mid / \mid < \mid \leq \mid = \mid \geq \mid > \mid \neq \mid \text{et} \mid \text{ou}$

$\langle \text{optun} \rangle \rightarrow \oplus \mid \ominus \mid \text{non}$

$\langle \text{variable} \rangle \rightarrow A \mid B \mid C \mid \dots \mid Z$

Exemples d'ECP

► ECP conformes :

-
- $((A/B)=C)\text{et}(E_iF)$
- $(\ominus A)$

► ECP non conformes :

- (A)
- $((A+B))$
- $A \oplus B$

Expressions préfixées

Les expressions préfixées (EPRE) se construisent à partir des 4 règles suivantes :

1. une variable est une EPRE,
2. si x et y sont des EPRE et β un opérateur binaire alors
3. Si x est une EPRE et α un opérateur unaire, alors
4. il n'y a pas d'autres EPRE que celles formées à partir des 3 règles précédentes.

ECP	EPRE	EPOST
$((A < B) \text{ et } (\text{non } C))$	et < A B non C	A B < C non et
$((\text{non } (A < B)) \text{ et } (C > D))$	et non < A B > C D	A B < non C D > et

273 / 298

Expressions Infixées



- Écriture ECP sans ambiguïté mais parfois un peu lourde.
- Suppressions de certaines parenthèses par 2 données implicites :

1. Priorité des opérateurs

2. Priorité à gauche pour les opérateurs de même priorité

- Les parenthèses imposent des priorités

$$A - B - C \Leftrightarrow ((A - B) - C) \neq A - (B - C) \Leftrightarrow (A - (B - C))$$

274 / 298

Priorité des opérateurs



Opérateur	Priorité
(0
<, ≤, =, ≥, >, ≠, >	1
ou, +, -	2
et, *, /	3
⊖, ⊕, non	4

275 / 298

Grammaire des EINF



- $\{expr\}$: expression éventuellement présente un nombre quelconque

$\langle einf \rangle \rightarrow \langle esimple \rangle \{ \langle op1 \rangle \langle esimple \rangle \}$

$\langle esimple \rangle \rightarrow \langle terme \rangle \{ \langle op2 \rangle \langle terme \rangle \}$

$\langle terme \rangle \rightarrow \langle facteur \rangle \{ \langle op3 \rangle \langle facteur \rangle \}$

$\langle facteur \rangle \rightarrow \langle variable \rangle \mid$

$\langle op4 \rangle \langle facteur \rangle \mid$

$(\langle einf \rangle)$

de fois.

$\langle op1 \rangle \rightarrow < | = | > | \leq | \neq | \geq$

$\langle op2 \rangle \rightarrow + | - | \text{ou}$

$\langle op3 \rangle \rightarrow * | / | \text{et}$

$\langle op4 \rangle \rightarrow \ominus | \oplus | \text{non}$

$\langle variable \rangle \rightarrow A | B | C | \dots | Z$

276 / 298

Notes

Notes

Notes

Notes

EINF	ECP
$A*B+C-D$	$((A * B) +C)-D$
$A+B*C$	$(A+(B * C))$
$A=B$ et $C>D$	
A et B ou C et D	$((A$ et $B)$ ou $(C$ et $D))$
A et $(B$ ou $C)$ et D	$((A$ et $(B$ ou $C))$ et $D)$
non A et B ou C et non D	$((\text{non } A)$ et $B)$ ou $(C$ et $(\text{non } D))$

277 / 298

Évaluation d'expression



- ▶ L'évaluation s'effectue par rapport à un environnement (affectation des variables).
- ▶ Idée : Ordonner l'évaluation de façon à ce que l'évaluation d'une opération s'effectue sur
 - ▶ des variables ou
 - ▶ des expressions déjà évaluées.
- ▶ Soit S appliquant β sur x et y .

$$\text{evaluation}(S) = \begin{cases} \text{opération}(\beta, & \\ \text{si variable}(x) \text{ alors valeur}(x) \text{ sinon } \text{evaluation}(x), & \\ \text{si variable}(y) \text{ alors valeur}(y) \text{ sinon } \text{evaluation}(y) \end{cases}$$

278 / 298

Exemple d'évaluation



- ▶ Soit à évaluer $S=(A+(B*C))$ avec $A = 2, B = 3, C = 4$.

$$\begin{aligned} \text{evaluation}(S) &= \text{opération}(+, A, \text{évaluation}(B*C)) \\ &= \text{opération}(+, A, \text{opération}(*, B, C)) \\ &= \text{opération}(+, 2, \text{opération}(*, 3, 4)) \\ &= \text{opération}(+, 2, 12) \\ &= 14 \end{aligned}$$

279 / 298

Évaluation d'une expression postfixée



- ▶ Les opérandes apparaissent avant l'opération.
- ▶ L'évaluation d'une opération fournit soit le résultat soit un nouvel opérande.

$$\begin{aligned} 10 \ 3 \ + \ 5 \ 6 \ \text{--} &= 13 \ 5 \ 6 \ \text{--} \\ &= 13 \ - \ 1 \ - \\ &= 14 \end{aligned}$$

- ▶ Idée :
 - ▶ empiler les opérandes,
 - ▶ dépiler pour effectuer une opération.

280 / 298

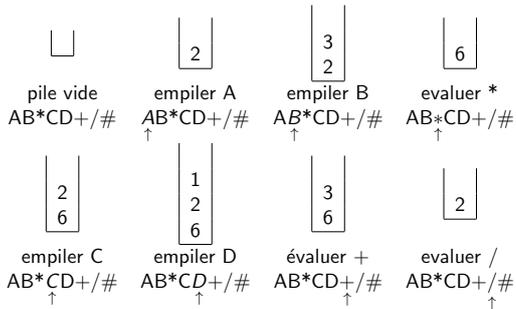
Notes

Notes

Notes

Notes

► évaluons $A B * C D + /$ avec $A=2, B=3, C=2, D=1$



Notes

Évaluation d'EPOST : Énumération des cas

Soit $epost[1..MAX]$ une chaîne de caractères contenant une EPOST et i une position dans la chaîne.

- Si $epost[i] = \#$: l'évaluation est terminée. Résultat en sommet de pile.
- Si $epost[i] \neq \#$
- Si $epost[i]$ est une variable : empiler sa valeur
- Si $epost[i]$ est un opérateur :
 1. on dépile son (ou ses 2 opérandes),
 2. on effectue l'opération et
 3. on empile le résultat.

Notes

Évaluation d'EPOST : l'algorithme

fonction evalPost ($epost$: **Tableau**[1... MAX] de **Caractère**) : **Réel**

Déclaration i : **Entier**, $valG, valD$: **Réel**, p : **Pile**
début

```

p ← creer()
i ← 1
tant que  $epost[i] \neq \#$  faire
    si variable( $epost[i]$ ) alors
        empiler( $epost[i]$ , p)
    sinon
        empiler( $valD$ , p)
        si
            alors
                 $valD \leftarrow$  dépiler(p)
                 $valG \leftarrow$  dépiler(p)
                 $valD \leftarrow$  oper2( $valG, epost[i], valD$ )
            finsi
        empiler( $valD$ , p)
        finsi
         $i \leftarrow i + 1$ 
    tantque

```

fin

Notes

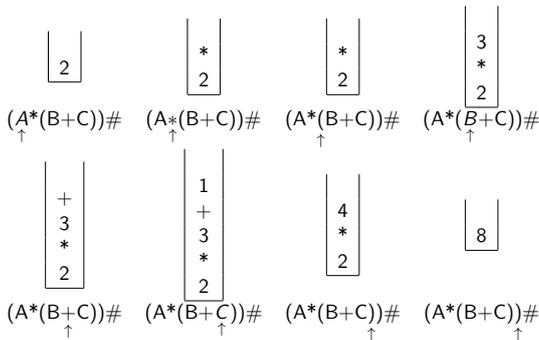
Évaluation d'ECP

► Utilisation d'une pile à travers trois types d'actions :

1. Si le symbole lu est un opérateur : on l'empile
2. si c'est une variable : on empile sa valeur,
3. Si c'est une parenthèse droite :
 - 3.1 on dépile une sous expression et
 - 3.2 on empile le résultat.

Notes

► évaluons $(A * (B+C))$ avec $A=2, B=3, C=1$.



Notes

Évaluation d'ECP : l'algorithme

fonction evalEcp (ecp : **Tableau**[1... MAX] deCaratère) : **Réel**

Déclaration i :Entier,op :Caratère,valG,valD :Réel,p : Pile **début**

```

p ← creer()
i ← 1
tant que ecp[i] ≠ '#' faire
    si variable(ecp[i]) alors
        empiler(valeur(ecp[i]),p)
    sinon
        valG ← dépiler(p)
        si operateur(ecp[i]) alors
            emp.(op2(valG,op,valD),p)
        fin
    empiler(ecp[i],p)
    continuer
fin
fin
i ← i+1
valD ← dépiler(p)
op ← dépiler(p)
retourner sommet(p)
    
```

Notes

Conversion ECP à EPOST

- ECP lisibles, tapé par exemple dans un code source,
- EPOST directement interprétable par une machine.
- Nécessité de convertir.
- Remarque : Lors de la lecture d'une ECP on rencontre les opérandes dans le même ordre que dans l'EPOST. Seul l'opérateur est placé à la fin.

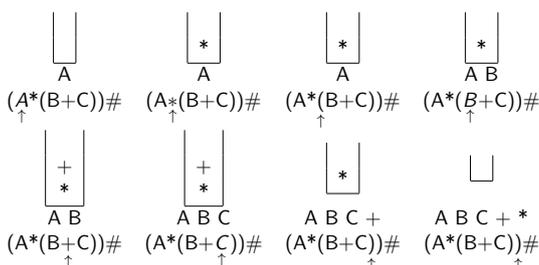
$$(A + B) \rightarrow AB+$$

- Idée : Empiler les opérateurs et les dépiler sur les parenthèses fermantes.
- Opérateur : empiler,
- variable : écrire dans chaîne résultat.
- parenthèse fermante : dépiler un opérateur
- parenthèse ouvrante : ne rien faire.

Notes

Exemple de conversion

► Convertissons $(A * (B+C))$



Notes



procédure convEcpEpost (**E** ecp : **Tableau**[1... MAX] **deCaratère** , **S** epost : **Tableau**[1... MAX] **deCaratère**)

Déclaration indecp, indepost : **Entier**, p : **Pile**

début

```

p ← creer()
indecp ← 1
indepost ← 1
tant que ecp[indecp] ≠ '#'
faire
    si operateur(ecp[i]) alors
        empiler(ecp[i], p)
        continuer
    fin
    si variable(ecp[i]) alors
        epost[indepost] ← ecp[i]
        indepost ← indepost + 1
    fin
    indepost ← indepost + 1
    continuer
fin
    indecp ← indecp + 1
fin
    epost[indepost] ← '#'
    indepost ← indepost + 1
fin
    
```

fin

Conversion ECP/EPOST : Amélioration



- ▶ Détection d'erreurs de syntaxe dans l'ECP.
- ▶ La pile ne doit pas être vide avant la fin (trop de parenthèses fermantes) et vide à la fin (pas assez).
- ▶ Un caractère d'ECP est soit :
 - ▶ un opérateur,
 - ▶ une variable,
 - ▶ une parenthèse fermante,
 - ▶ une parenthèse ouvrante.

Notes

Notes

Conversion EINF à EPOST



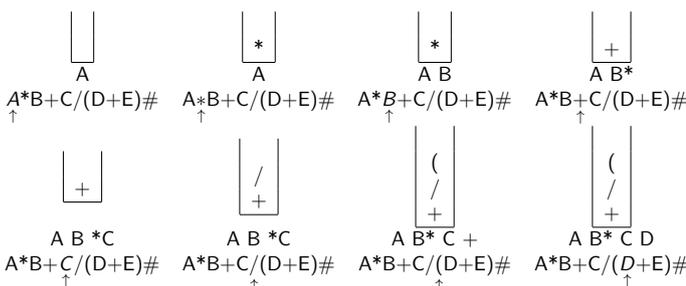
- ▶ Problème compliqué par l'absence de parenthèses. On applique les règles suivantes :
 - ▶ variable : empiler.
 - ▶ opérateur : empiler.
 Il faut dépiler auparavant tous les opérateurs de priorité supérieure ou égale.
- ▶ parenthèse gauche :
 - ▶ Délimite une sous expression.
- ▶ parenthèse droite :
 - ▶ jusqu'à une parenthèse gauche.

Notes

Exemple de conversion (1/2)

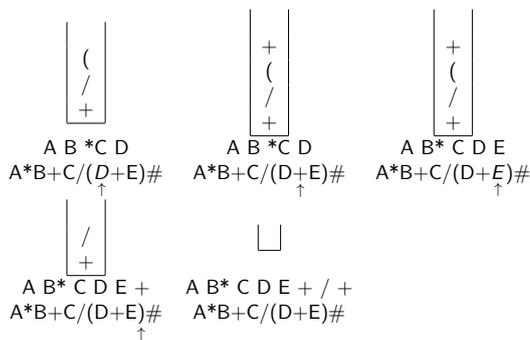


- ▶ Convertissons $A * B + C / (D + E)$



Notes

► $A*B+C/(D+E)$



Notes

Conversion EINF/EPOST : Points délicats

- Trois points délicats :
- Empilement d'une opération,
- Rencontre d'une parenthèse fermante,
- Fin de l'algorithme et vidage de la pile.

Notes

Empilement d'une opération

procédure traiterOpt (**E** op : Caratère , **S** epost : Tableau[1... MAX] de Caratère **E/S** p : Pile, indpost : Naturel)

Déclaration depil : Booléen, élément : Caratère

début

depil ← non vide(p)

tant que depil **faire**

si priorité(sommet(p)) ≥ priorité(op) **alors**

élément ← depiler(p)

epost[indpost] ← élément

indpost ← indpost+1

depil ← non vide(p)

sinon

depil ← faux

finsi

fintantque

empiler(op)

Notes

Rencontre d'une parenthèse fermante

procédure traiterPF (**S** epost : Tableau[1... MAX] de Caratère , **E/S** indpost : Naturel, p : Pile)

Déclaration élément : Caratère

début

élément ← depiler(p)

tant que élément ≠ ')' **faire**

epost[indpost] ← élément

indpost ← indpost+1

élément ← depiler(p)

fintantque

fin

Notes

procédure traiterFin (**S** epost : **Tableau**[1...MAX] deCaratère
 , **E/S** indpost : **Naturel**, p : Pile)
Déclaration élément : Caratère
début
tant que non vide(p) **faire**
 epost[indpost] ← depiler(p)
 indpost ← indpost+1
fin tant que
 epost[indpost] ← '#'
fin

Notes

Conversion EINF/EPOST : l'algorithme

procédure convEinfEpost (**E** einf : **Tableau**[1...MAX]
 deCaratère , **S** epost : **Tableau**[1...MAX] deCaratère)
Déclaration indinf,indpost :Entier,p : Pile
début
 p ← creer() einf[indinf]
 indinf ← 1 indpost ← indpost+1
 indpost ← 1 continuer
tant que einf[indinf]≠'#' **finsi**
faire **si** einf[i]=')' **alors**
 si operateur(einf[indinf])
 alors traiterPF(epost,indpost,p)
 traiterOpt(einf[indinf],epost,indpost,p)
 continuer empiler('(');
finsi **finsi**
si variable(einf[indinf]) indinf ← indinf+1
 epost[indpost] ← traiterFin(epost,indpost,p)
fin

Notes

Notes

Notes
