

Algorithmique

Chiffres, nombre et bases

Il y a 10 types de personnes:
Ceux qui comprennent le binaire et les autres

Luc Brun
ENSICAEN



Notes



Références

- *Histoire universelle des chiffres*, Georges Ifrah, Robert Laffont, 1994.
- *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, Georges Ifrah, Robert Laffont.
- *Le nombre, langage de la science*, A. Blanchard, Paris 1974.
- *Compter avec des cailloux*, Alain Schärli, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- *L'empire des nombres*, Denis Guedj, Découvertes Gallimard, 1996.

Notes



Plan

- D'où viennent les chiffres ?
- Les bases
 - Les bases historiques
 - base 5
 - base 20
 - base 12
 - base 60
 - base 10
 - Les bases informatiques (bases 2,8,16)
- Conversions,
- Addition, soustraction.

Notes

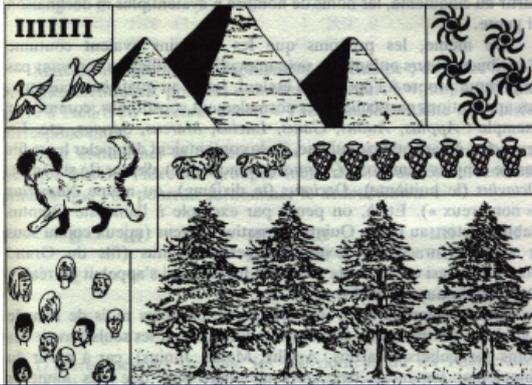


D'où viennent les chiffres ?

- Origine perdue. Mais le concept de chiffre n'est pas naturel (certaines tribus ne le connaissent pas). Il a donc été inventé.
- Histoire sur au moins plusieurs millénaires.
- Acteurs : _____ et mathématiciens.
- Histoire non linéaire (avancées/reculs).
- Les concepts de chiffres et leurs manipulations (addition, soustraction, multiplication, division) ont jusqu'à très récemment été considéré comme des opérations d'une extrême complexité réservée à une élite.
- Au moyen âge comprendre la multiplication et la division \approx doctorat.
- Inventeurs essentiellement anonymes.

Notes

- Intuition de la quantité (limité à 3/4)

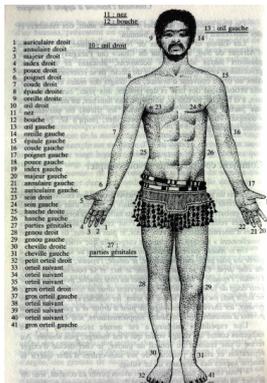


Notes

- Traces :
 - En arabe moderne : rajulun (1 homme), rajulani(2 hommes), rijalun (des hommes).
 - En français : Trois ≈ très, trans
 - En Anglais : Three ≈ throng (foule), trough (au delà)
- Avoir l'intuition de quantité ne signifie pas compter.
- Compter implique trois choses :
 - 1 assigner un rang à chaque objet à compter
 - 2 introduire dans l'unité qui passe le souvenir de toutes celles qui l'on précédé.
 - 3 Convertir cette succession en simultanéité.

Notes

- Associer une quantité à un rang dans une suite.



Notes

- Correspondance unité par unité :

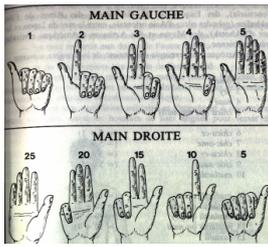
- Compter implique d'associer une séquence de noms (de symboles) ou (de pierres, d' entailles) à une quantité.
- On ne peut pas retenir une infinité de symboles ni prévoir une infinité de pierres.
- Il faut donc regrouper des parties de séquences par paquets. La taille d'un paquet constitue la **base**.
- Le nombre 4256 en base b se lie 6 unités + 5 paquets de b éléments + 2 paquets de $b * b$ éléments + 4 paquets de $b * b * b$ éléments (remarque : dans ce cas $b \geq 6$). On a donc :

Remarque : $a_i \leq b \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

- Les bases historiques ont des racines anthropomorphiques.

Notes

- Issue d'un comptage sur une main, l'autre main servant à marquer les «dizaines» de la base.



Notes

- A été utilisée par les mayas, les astèques et les peuples celtes.
- Issue des mains+pieds. Traces dans le langage courant.
- Anglais : One score, two score : $1 \times 20, 2 \times 20$
- Français : 80 : $4 \times 20, 90 : 4 \times 20 + 10$.

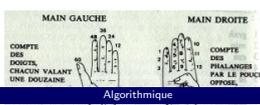
Notes

- Base divisible par 2, 3, 4 et 6. Extrêmement utile lorsque l'on ne connaît pas (ou peu) les nombres rationnels.
- Les Summériens partageaient le jour en 12 parties égale.
- Traces : 1 journée = 2×12 heures, 1 pied = 12 pouces ; 1 pouce = 12 lignes ; 1 ligne = 12 points (avant la révolution et encore en Angleterre).
- sans doute issue d'un



Notes

- Origine peu connue, utilisée (entre autre) par les sumériens et les babyloniens.
- Peu commode du fait de sa taille (nécessite d'apprendre et de manipuler 60 symboles).
- Très pratique pour extraire des parts : divisible part $60 = 12 * 5$ est divisible par 2, 3, 4, 5, 6. C'est le plus petit nombre ayant cette propriété.
- Deux explications principales pour son origine :
 - Combinaison des bases 12 et 5 lors de la rencontre de 2 civilisations : $60 = \text{ppcm}(5, 12)$.
 - Combinaison de la technique de comptage de la base 12 avec l'utilisation de la main droite pour compter les «dizaines» de la base.



Notes

-
- Ne présente aucun intérêt particulier
- peu de diviseurs : 2 et 5
- taille faible mais équivalente à 8, 11 ou 12.
- C'est imposée en raison des 10 doigts de la main.

-
- $54 = 5 * b + 4$: Comment désigner $5 * b$?
- Babyloniens 3^{ème}siècle avant JC inventent un signe () pour désigner l'absence d'une unité.
- Mayas, chinois...
- Ils ne comprennent pas le 0 comme un nombre : 4-4 reste pour eux indéfini.
- Invention du 0, par les indiens V^{ème}siècle après JC (par Brahmagupta) → arabes → europe.

- Les bases utilisées sont les bases . La base 10 n'est utilisée que pour converser avec les humains...
- La base 2 : Base utilisée nativement par l'ordinateur (le courant passe : 1, ou ne passe pas : 0).
- La base 8 : Utilisée surtout pour la gestion des droits. ex :

util.	groupe.	autres.
4 2 1	4 2 1	4 2 1
r w x	r w x	r w x
- chmod 755 toto → tout droits pour util, lecture/exécution pour groupe et autres. 7 et 5 sont exprimés en base 8.
- Base 16 : Base utilisée préférentiellement pour manipuler des bits. 1 chiffre=4 bits.
- Notations :
 - de 1 à 9 : Chiffres arabes,
 - de 10 à 15 : a(10),b(11),c(12),d(13),e(14) et f(15).

base 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
base 16	0x01	0x02	0x03	0x04	0x05	0x06	0x07	0x08	0x09	0x0a
base 8	01	02	03	04	05	06	07	010	011	012
base 2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

base 10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
base 16	0x0b		0x0d	0x0e	0x0f	0x10		0x12	0x13	0x14
base 8	013		015	016	017	020		022	023	024
base 2	1011		1101	1110	1111	10000		10010	10011	10100

$$\begin{aligned}
 17 &= 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\
 &= 1 \times 16^1 + 1 \times 16^0 \\
 &= 2 \times 8^1 + 1 \times 8^0 \\
 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0
 \end{aligned}$$

- Soit un nombre x en base 10

- 1
- 2
- 3

- Exemples :

- 126 en base 16.
- $16^2 = 256$ donc on divise par 16 $126 = 7 \times 16 + 14$.
- On a donc $126 = 7 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 0x7e$
- 126 en base 8.
- $8^3 = 512 > 126$, donc $126 = 1 \times 8^2 + 62$
- $62 = 7 \times 8 + 6$.
- Donc $126 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 6 = 0176$.

Notes

- Passage par la base 2.

	7	6	5	4	3	2	1	0
	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
126 =	128	64	32	16	8	4	2	1
	0	1	1	1	1	1	1	0
	1			7			6	

$$\begin{aligned}
 x &= a_7 2^7 + a_6 2^6 + a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 &= 2^4 (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2^1 + a_4 2^0) + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 &= 16 (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2^1 + a_4 2^0) + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 &= 2^6 (a_7 2^1 + a_6 2^0) + 2^3 (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 &= 8^2 (a_7 2^1 + a_6 2^0) + 8 (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0
 \end{aligned}$$

Notes

- base 16 vers base 2 : Écrire chaque chiffre en base 2 (sur 4 bits) et concaténer.

8	4	2	1	8	4	2	1
8				f			

- Exemple pour 0x8f.

- Base 8 vers base 2 : même principe sauf que l'on regroupe par 3.

2	1	4	2	1	4	2	1
1			7			5	
0	1	1	1	1	1	0	1

- Exemple pour 0175

- $0175 = 01111101 (=125)$

- Conversions 8, 16 ou 16, 8 passer par la base 2.

Notes

- Additionner membre à membre, ajouter une retenue si on dépasse la base.

- Soit à additionner =130 et 140

base 10	base 8	base 16
1 3 0	2 0 2	8 2
+ 1 4 0	+ 2 1 4	+ 8 c
2 7 0		

base 2							
1	0	0	0	0	0	1	0
+ 1	0	0	0	1	1	0	0

Notes

- Soit à calculer :

$$(x_1 \dots, x_n)_b - (y_1 \dots, y_n)_b$$

- Si tous les chiffres du premier nombre sont supérieurs aux chiffres du second ($x_i \geq y_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$).

$$(x_1 \dots, x_n)_b - (y_1 \dots, y_n)_b = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

• Exemple :

$$\begin{array}{r} 2 \ 1 \ 4 \\ - 2 \ 0 \ 2 \\ \hline 0 \ 1 \ 2 \end{array}$$

Notes

- $\exists i, x_i < y_i$. Soit j l'indice minimum satisfaisant la propriété.

$$\begin{array}{r} x_n b^n + \dots + x_i b^i + \dots + x_0 b^0 \\ - y_n b^n + \dots + y_j b^j + \dots + y_0 b^0 \\ \hline = \begin{array}{r} x_n b^n + \dots + (x_i + b) b^i - b^{i+1} + \dots + x_0 b^0 \\ - y_n b^n + \dots + y_j b^j + \dots + y_0 b^0 \end{array} \\ \hline = \begin{array}{r} x_n b^n + \dots + x_{i+1} b_{i+1} + (x_i + b) b^i + \dots + x_0 b^0 \\ - y_n b^n + \dots + (y_{i+1} + 1) b^{i+1} + y_j b^j + \dots + y_0 b^0 \end{array} \end{array}$$

Notes

- Exemples :

base 10	base 8	base 16
2 3 0	3 0 2	8 f 2
- 1 4 0	- 2 1 4	- 8 a c
0 9 0		

$$\begin{array}{r} \text{base 2} \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ - 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline \end{array}$$

Notes

Notes
