Algorithmique

Chiffres, nombre et bases

Il y a 10 types de personnes:
Ceux qui comprennent le binaire et les autres

Luc Brun

ENSICAEN

Références

- *Histoire universelle des chiffres*, Georges Ifrah, Robert Laffont, 1994.
- *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention,* Georges Ifrah, Robert Laffont.
- *Le nombre, langage de la science*, A. Blanchard, Paris 1974.
- *Compter avec des cailloux*, Alain Schärlig, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- *L'empire des nombres*, Denis Guedj, Découvertes Gaillimard, 1996.

Plan

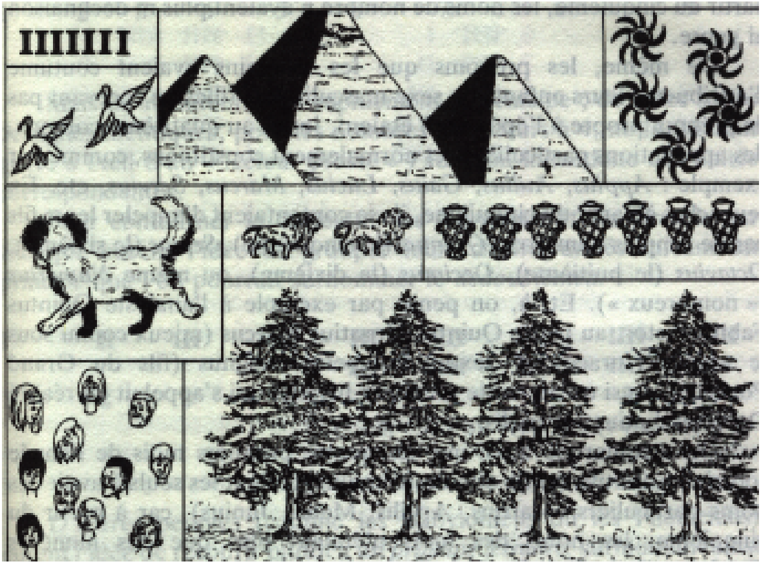
- D'où viennent les chiffres ?
- Les bases
  - Les bases historiques
    - base 5
    - base 20
    - base 12
    - base 60
    - base 10
  - Les bases informatiques (bases 2,8,16)
- Conversions,
- Addition, soustraction.

D'où viennent les chiffres ?

- Origine perdue. Mais le concept de chiffre n'est pas naturel (certaines tribus ne le connaissent pas). Il a donc été inventé.
- Histoire sur au moins plusieurs millénaires.
- Acteurs : et mathématiciens.
- Histoire non linéaire (avancées/reculs).
- Les concepts de chiffres et leurs manipulations (addition, soustraction,multiplication, division) ont jusqu'à très récemment été considéré comme des opérations d'une extrême complexité réservée à une élite.
- Au moyen âge comprendre la multiplication et la division≈ doctorat.
- Inventeurs essentiellement anonymes.

Les nombres avant les nombres

- Intuition de la quantité (limité à 3/4)



La préhistoire des nombres

-

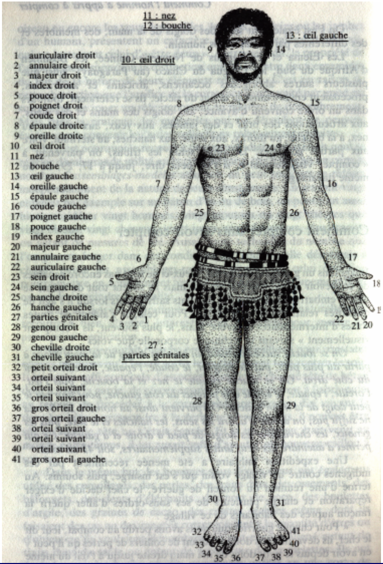
- Traces :

- En arabe moderne : rajulun (1 homme), rajulani(2 hommes), rijalun (des hommes).
- En français : Trois$\approx$ très, trans
- En Anglais : Three$\approx$throng(foule), trough (au delà)

- Avoir l'intuition de quantité ne signifie pas compter.
- Compter implique trois choses :

1. assigner un rang à chaque objet à compter
2. introduire dans l'unité qui passe le souvenir de toutes celles qui l'on précédé.
3. Convertir cette succession en simultanéité.

- Associer une quantité à un rang dans une suite.



Compter sans savoir compter

- Associer une quantité à un rang dans une suite.
- Correspondance unité par unité :
  - Perles des colliers à prières.
  - Sacs de cailloux
  - Encoches sur des bâtons
- Autant de x que de cailloux ou d'encoches

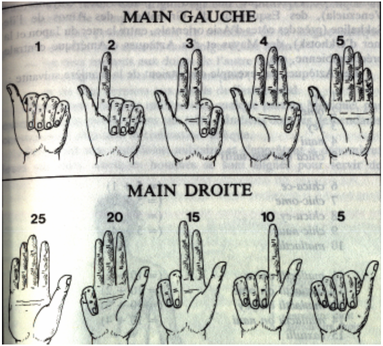
Apparitions des bases

- Compter implique d'associer une séquence de noms (de symboles) ou (de pierres, d' entailles) à une quantité.
- On ne peut pas retenir une infinité de symboles ni prévoir une infinité de pierres.
- Il faut donc regrouper des parties de séquences par paquets. La taille d'un paquet constitue la **base**.
- Le nombre 4256 en base b se lie 6 unités $+$ 5 paquets de b éléments $+$ 2 paquets de $b * b$ éléments $+$ 4 paquets de $b * b * b$ éléments (remarque : dans ce cas $b \geq 6$). On a donc :

  Remarque : $a_i \leq b \forall i \in \{0, \ldots, n\}$.
- Les bases historiques ont des racines anthropomorphiques.

La base 5

- Issue d'un comptage sur une main, l'autre main servant à marquer les ≪dizaines≫ de la base.

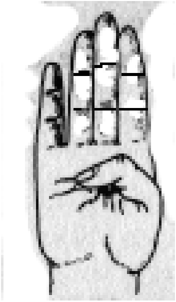


La base 20

- A été utilisée par les mayas, les astèques et les peuples celtes.
- Issue des mains+pieds. Traces dans le langage courant.
  - Anglais : One score,two score : $1 \times 20, 2 \times 20$
  - Français : 80 : 4×20, 90 : $4 \times 20 + 10$.

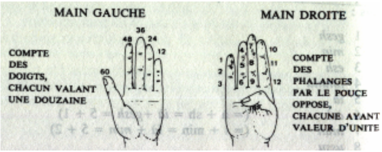
La base 12

- Base divisible par 2, 3, 4 et 6. Extrêmement utile lorsque l'on ne connaît pas (ou peu) les nombres rationnels.
- Les Summériens partageaient le jour en 12 parties égale.
- Traces : 1 journée $=2 \times 12$ heures, 1pied=12 pouces ;1 pouce=12 lignes ;1ligne=12 points (avant la révolution et encore en Angleterre).
- sans doute issue d'un



La base 60

- Origine peu connue, utilisée (entre autre) par les sumériens et les babyloniens.
- Peu commode du fait de sa taille (nécessite d'apprendre et de manipuler 60 symboles).
- Très pratique pour extraire des parts : divisible part $60 = 12 * 5$ est divisible par $2, 3, 4, 5, 6$. C'est le plus petit nombre ayant cette propriété.
- Deux explications principales pour son origine :
  - Combinaison des bases 12 et 5 lors de la rencontre de 2 civilisations : $60 = \text{ppcm}(5, 12)$.
  - Combinaison de la technique de comptage de la base 12 avec l'utilisation de la main droite pour compter les ≪dizaines≫ de la base.



La base 10

-
- Ne présente aucun intérêt particulier
  - peu de diviseurs : 2 et 5
  - taille faible mais équivalente à 8, 11 ou 12.
- C'est imposée en raison des 10 doigts de la main.

Le zéro

- $54 = 5 * b + 4$: Comment désigner $5 * b$?
- Babyloniens 3^{e}siècle avant JC inventent un signe () pour désigner l'absence d'une unité.
- Mayas, chinois...
- Ils ne comprennent pas le 0 comme un nombre : 4-4 reste pour eux indéfini.
- Invention du 0, par les indiens V^{e}siècle après JC (par Brahmagupta) $\rightarrow$ arabes$\rightarrow$ europe.

Les bases en informatique

- Les bases utilisées sont les bases . La base 10 n'est utilisée que pour converser avec les humains. . .
- La base 2 : Base utilisée nativement par l'ordinateur (le courant passe : 1, ou ne passe pas : 0).
- La base 8 : Utilisée surtout pour la gestion des droits. ex :

	util.			groupe.			autres.	
4	2	1	4	2	1	4	2	1
r	w	x	r	w	x	r	w	x

- chmod 755 toto $\rightarrow$ tout droits pour util, lecture/exécution pour groupe et autres. 7 et 5 sont exprimés en base 8.
- Base 16 : Base utilisée préférentiellement pour manipuler des bits. 1 chiffre=4 bits.
- Notations :
  - de 1 à 9 : Chiffres arabes,
  - de 10 à 15 : a(10),b(11),c(12),d(13),e(14) et f(15).

Les premiers nombres

base 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
base 16	0x01	0x02	0x03	0x04	0x05	0x06	0x07	0x08	0x090	0x0
base 8	01	02	03	04	05	06	07	010	011	012
base 2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	101

base 10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
base 16	0x0b		0x0d	0x0e	0x0f	0x10		0x12	0x13
base 8	013		015	016	017	020		022	023
base 2	1011		1101	1110	1111	10000		10010	10011

$$\begin{aligned} 17 &= {\color{red}1} \times 10^1 + {\color{red}7} \times 10^0 \\ &= {\color{red}1} \times 16^1 + {\color{red}1} \times 16^0 \\ &= {\color{red}2} \times 8^1 + {\color{red}1} \times 8^0 \\ &= {\color{red}1} \times 2^4 + {\color{red}0} \times 2^3 + {\color{red}0} \times 2^2 + {\color{red}0} \times 2^1 + {\color{red}1} \times 2^0 \end{aligned}$$

Conversion base 10 vers base 2,8,16

- Soit un nombre x en base 10

1.
2.
3.

- Exemples :

- 126 en base 16.
- $16^2 = 256$ donc on divise par 16 $126 = 7 \times 16 + 14$.
- On a donc :$126_{=}7 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 0x7e$
- 126 en base 8.
- $8^3 = 512 > 126$, donc $126 = 1 \times 8^2 + 62$
- $62 = 7 \times 8 + 6$.
- Donc $126 = 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 6 = 0176$.

Conversion base 10 vers bases 2, 8, 16

- Passage par la base 2.

	7	6	5	4	3	2	1	0
	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	128	64	32	16	8	4	2	1
126=	0	1	1	1	1	1	1	0
	1		7			6		

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & a_7 2^7 + a_6 2^6 + a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
\hline
 & = & 2^4 (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2^1 + a_4 2^0) + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 & = & 16 (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2^1 + a_4 2^0) + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
\hline
 & = & 2^6 (a_7 2^1 + a_6 2^0) + 2^3 (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\
 & = & 8^2 (a_7 2^1 + a_6 2^0) + 8 (a_5 2^2 + a_4 2^1 + a_3 2^0) + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0
\end{array}
$$

Conversions 2,8,16

- base 16 vers base 2 : Écrire chaque chiffre en base 2 (sur 4 bits) et concaténer.
- Exemple pour $0x8f$.

8	4	2	1	8	4	2	1
8				f			

-
- Base 8 vers base 2 : même principe sauf que l'on regroupe par 3.
- Exemple pour 0175

2	1	4	2	1	4	2	1
1		7			5		
0	1	1	1	1	1	0	1

- $0175 = 01111101 (= 125)$
- Conversions 8, 16 ou 16, 8 passer par la base 2.

Additions

- Additionner membre à membre, ajouter une retenue si on dépasse la base.
- Soit à additionner =130 et 140

base 10

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 0 \\ + & 1 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

base 8

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 0 & 2 \\ + & 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

base 16

$$\begin{array}{ccc} & 8 & 2 \\ + & 8 & c \\ \hline \end{array}$$

base 2

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Soustraction (1/3)

- Soit à calculer :

$$(x_1 \dots, x_n)_b - (y_1 \dots, y_n)_b$$

- Si tous les chiffres du premier nombre sont supérieurs aux chiffres du second ($x_i \geq y_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$).

$$(x_1 \dots, x_n)_b - (y_1 \dots, y_n)_b = (x_1 - y_1, x_2 - y_2 \dots, x_n - y_n)$$

- Exemple :

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 1 & 4 \\ - & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Soustraction (2/3)

- $\exists i, x_i < y_i$. Soit j l'indice minimum satisfaisant la propriété.

$$\begin{array}{cccccc} & x_n b^n + & \dots & +x_i b^i + & \dots & +x_0 b^0 \\ - & y_n b^n + & \dots & +y_i b^i & \dots & +y_0 b^0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{cccccc} & x_n b^n + & \dots & +(x_i + b) b^i - b^{i+1} + & \dots & +x_0 b^0 \\ - & y_n b^n + & \dots & +y_i b^i & \dots & +y_0 b^0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccccc} & x_n b^n + & \dots & x_{i+1} b_{i+1} & +(x_i + b) b^i + & \dots & +x_0 b^0 \\ - & y_n b^n + & \dots & +(y_{i+1} + 1) b^{i+1} & +y_i b^i & \dots & +y_0 b^0 \\ \hline \end{array}$$

Soustraction (3/3)

- Exemples :

base 10

	2	3	0
-	1	4	0
	0	9	0

base 8

	3	0	2
-	2	1	4

base 16

	8	f	2
-	8	a	c

base 2

	1	0	0	0	1	1	0	0
-	1	0	0	0	0	0	1	0