

L'image considérée comme un signal

Luc Brun

25 janvier 2018

Introduction

Lissage

Détection de contours

Transformée de Fourier

Les différentes façons de considérer une image

- ▶ Un processus stochastique.
- ▶ Un vecteur aléatoire ($I[0, 0], I[0, 1], \dots, I[n, m]$) si la taille de l'image I est $n \times m$.
- ▶ **Une surface 3D (dans le cas d'un signal mono-dimensionnel).**
- ▶ Un ensemble de données liées par des contraintes géométriques.
- ▶ **La discrétisation d'un signal continu.**
- ▶ ...

L'image est considérée comme la discrétisation d'un signal continu :

$$I = Q \circ f$$

- ▶ I est l'image discrète,
- ▶ f le signal continu ($f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: Images en niveaux de gris),
- ▶ Q un opérateur d'échantillonnage.

- Combinaison de l'image f avec un autre signal pour en atténuer ou renforcer certains aspects.

$$\begin{aligned}f * g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x - u, y - v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u, x - v)g(u, v)dudv\end{aligned}$$

- Discrétisation basée sur des masques discrets :

$$M * I(i, j) = \sum_{k=-p}^p \sum_{l=-q}^q M[k][l]I[i - k][j - l]$$

- ▶ Supposons que g soit égal à $\frac{1}{R^2}$ sur un carré de côté R et nul partout ailleurs.

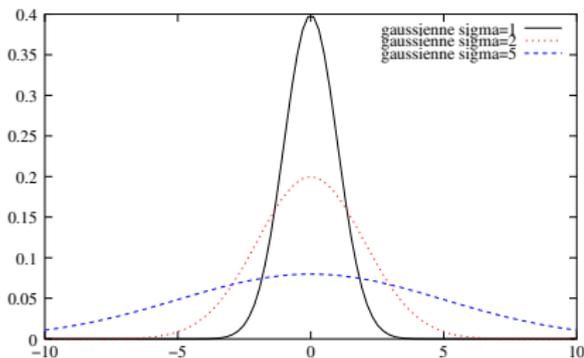
$$f * g(x, y) = \frac{1}{R^2} \int_{-R}^{+R} \int_{-R}^{+R} f(x - u, x - v) dudv$$

Chaque valeur de f est remplacée par sa moyenne sur le disque.

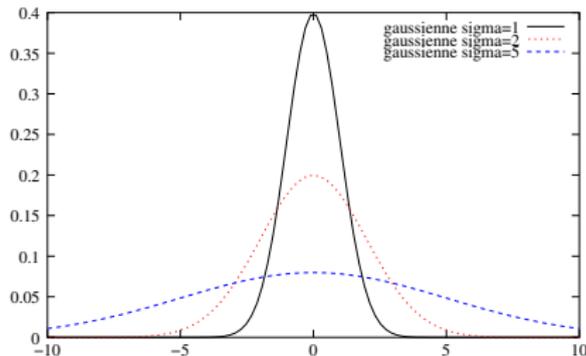
- ▶ Supposons que le carré C soit divisé en deux moitiés C^+ et C^- avec $g(u, v) = \frac{1}{R^2}$ sur C^+ et $-\frac{1}{R^2}$ sur C^- .

$$f * g(x, y) = \frac{1}{R^2} \int \int_{C^+} f(x - u, x - v) dudv - \frac{1}{R^2} \int \int_{C^-} f(x - u, x - v) dudv$$

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



Le paramètre σ contrôle l'aplatissement de la Gaussienne et permet donc de contrôler la puissance du filtre. Une forte valeur de σ induit un fort lissage et vice-versa.



La convolution d'un signal avec la Gaussienne s'effectue en limitant celle-ci à un support fini $[-M_\epsilon, M_\epsilon]$ avec :

$$\forall x \in [-M_\epsilon, M_\epsilon] \quad G(x) > \epsilon$$

M_ϵ : fonction croissante de σ

→ Plus on veut lisser plus il faut élargir le support

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma^2(2\pi)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = G(x)G(y)$$

La convolution de la fonction 2D f avec G donne donc :

$$\begin{aligned} f * G(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(u, v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(u) G(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u, y-v) G(v) dv \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) (f *_y G)(x-u, y) du \end{aligned}$$

$$f * G(x, y) = (G *_x (f *_y G))(x, y)$$

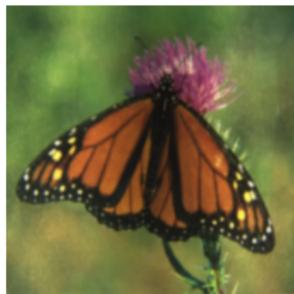
où $*_x$ et $*_y$ représentent les convolutions par rapport aux variables x et y .

- ▶ On a donc :

$$f * G(x, y) = (G *_x (f *_y G))(x, y)$$

- ▶ Utilisation de deux masques 1D de taille $[-M_\epsilon, M_\epsilon]$ plutôt qu'un masque 2D de taille $[-M_\epsilon, M_\epsilon]^2$
→ complexité $\mathcal{O}(2|I||M|)$ plutôt que $\mathcal{O}(|I||M|^2)$.
 - ▶ $|I|$: taille de l'image
 - ▶ $|M|$: taille du masque

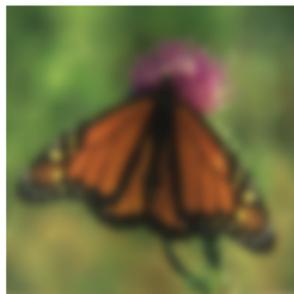
La Gaussienne



$$\sigma = 2$$



$$\sigma = 4$$



$$\sigma = 8$$

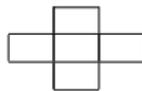


$$\sigma = 16$$

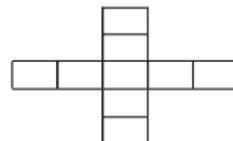
- ▶ Le filtre Gaussien, est basée sur une combinaison linéaire de valeurs du signal de départ.
- ▶ → Une impulsion dans le signal de départ, modifie obligatoirement le signal filtré.
- ▶ → Les contours sont adoucis.

- ▶ Affecte à chaque pixel la valeur médiane des pixels contenus dans un voisinage.

1. Définir un voisinage



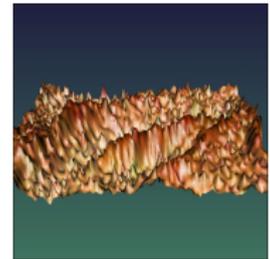
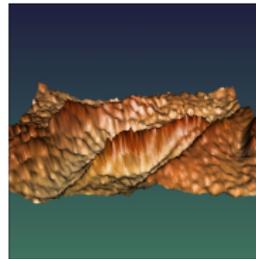
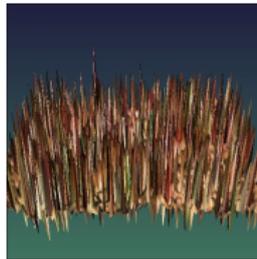
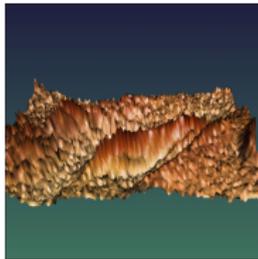
2. Trier les valeurs dans le voisinage
3. Affecter la médiane au pixel central.



- ▶ Propriétés :

1. Loi multiplicative : $M[af] = aM[f]$,
2. Filtre faiblement non linéaire,
3. Très efficace pour le bruit impulsionnel,
4. Respect des contours,
5. rejète les valeurs extrêmes → les valeurs minoritaires n'ont pas d'influence.
6. Non décomposable en une série de filtres $M_x \circ M_y(f) \neq M(f)$.

Exemple 1



Original

Poivre & Sel

Median

Gaussienne

Exemple 2



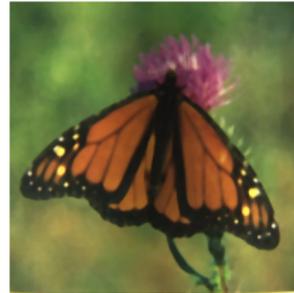
taille = 3



taille = 5



taille = 7



taille = 9



- ▶ Les changements brusques du signal correspondent à de hautes valeurs de sa dérivée.
- ▶ Dans le cas 2D cela correspond à une différentielle :

$$\begin{aligned} Df(p) \cdot \vec{n} &= \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot n_x + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot n_y \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p) - f(p + (hn_x, hn_y))}{h} \end{aligned}$$

- ▶ Seule la direction de \vec{n} compte. $\rightarrow \|\vec{n}\| = 1$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- ▶ On a alors : $Df(p) \cdot \vec{n} = \nabla f(p) \bullet \vec{n}$
- ▶ De plus :

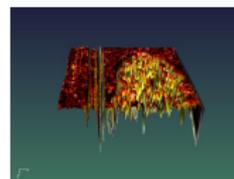
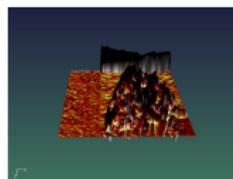
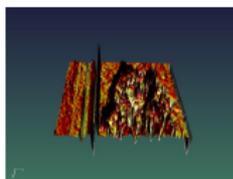
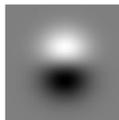
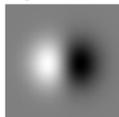
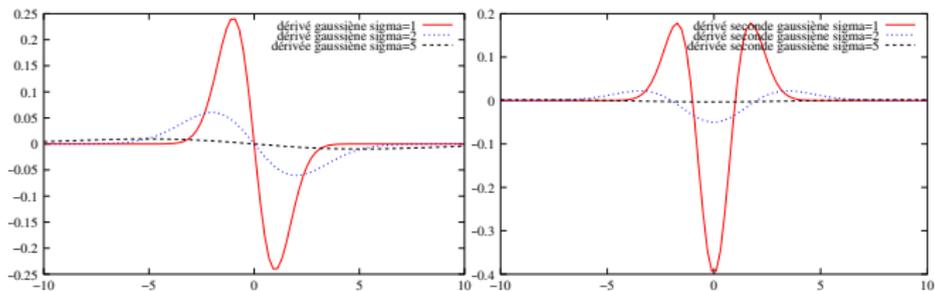
$$\max_{\|\vec{n}\|=1} |Df(p) \cdot \vec{n}| = \max_{\|\vec{n}\|=1} |\nabla f(p) \bullet \vec{n}| = \|\nabla f(p)\|$$

- ▶ La norme du gradient donne la variation maximum de la différentielle. Le maximum étant atteint pour \vec{n} colinéaire à $\nabla f(p) \rightarrow$ la direction du gradient donne la direction de plus grande variation de la fonction f .

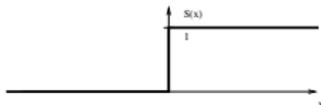
$$(f * g)^{(k)} = (f^{(k)}) * g = f * (g^{(k)})$$

- ▶ Plutôt que de lisser f et calculer son gradient, on le convolu avec la dérivé d'une Gaussienne (pré-calculé).
- ▶ De même, le calcul du Laplacien s'effectue en convoluant f avec le Laplacien d'une Gaussienne.

Détection de contours



- Modélisation d'un contour : $C(x) = S_0S(x) + B(x)$



L'opérateur optimal h convolé avec C doit avoir un maximum en zéro et permettre [Canny86] :

1. Une bonne détection
2. Une bonne localisation
3. Une faible multiplicité des maxima dûs au bruit.

$$\rightarrow 2h(x) - 2\lambda_1 h^{(2)}(x) + 2\lambda_2 h^{(3)}(x) + \lambda_3 = 0$$

- ▶ Canny 86 : Contrainte support fini :

$$h(0) = 0 ; h(M) = 0 ; h'(0) = S ; h'(M) = 0$$

→ Fonction complexe à implémenter.

- ▶ Deriche 87 : Même équation, support infini :

$$h(0) = 0 ; h(+\infty) = 0 ; h'(0) = S ; h'(+\infty) = 0$$

$$\Rightarrow h(x) = ce^{-\alpha|x|} \underset{\omega \approx 0}{\sin \omega x} = c\omega x e^{-\alpha|x|} = Cx e^{-\alpha|x|}$$

- ▶ Lissage :

$$l(x) = \int_0^x h(x) dx = b(\alpha|x| + 1)e^{-\alpha|x|}$$

α contrôle le lissage (même rôle que σ)

- ▶ Utilisation de la transformée en $z \rightarrow$ implémentation récursive.
Exemple : convolution de $x(i)$ avec $l(i)$ (résultat dans y)

$$\begin{aligned} \text{Pour } m = 1, \dots, M \\ y^+(m) &= a_0x(m) + a_1x(m-1) - b_1y^+(m-1) - b_2y^+(m-2) \\ \text{Pour } m = M, \dots, 1 \\ y^-(m) &= a_2x(m+1) + a_3x(m+2) - b_1y^-(m+1) - b_2y^-(m+2) \\ \text{Pour } m = 1, \dots, M \\ y(m) &= y^+(m) + y^-(m) \end{aligned}$$

M : taille du signal. Coefficients a_i et b_i déduis du paramètre α . 8 opérations quelque soit α .

- ▶ Avantages des filtres de Deriche :
 1. Formalisation de la notion de contour
 2. Temps de calculs indépendants de α .
 3. Pas de coupure du filtre



original



$\alpha = 1$



$\alpha = 5$



$\alpha = 10$



- ▶ Un fort gradient, ne correspond pas forcément à un contour et inversement.
- ▶ Détection des maxima locaux des gradients : zéros de la différentielle seconde.

$$D_2f(p).\vec{n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p).n_x.n_x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p).n_y.n_y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p).n_x.n_y$$

- ▶ Extremum de $Df(p).\vec{n}$ en $\vec{n} \Rightarrow$ zéros de $D_2f(p).\vec{n}$ en \vec{n} .

$$\Delta f(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$$

- ▶ Invariant par rotation $\rightarrow n$ n'intervient pas.
- ▶ L'utilisation du Laplacien évite donc de calculer le gradient en plus de la différentielle seconde.
- ▶ Attention !!
 $\Delta f(p) = 0 \not\Rightarrow \exists \vec{n} / D_2 f(p) \cdot \vec{n} = 0$
- ▶ Coïncidence uniquement si (Marr 1980) : les variations d'intensité sont linéaires sur la ligne de passage par zéro et sur les lignes parallèles dans un voisinage de p .



- ▶ Les zéros du Laplacien sont déterminés par ses changements de signes.

Gradient Couleur

$$f \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \end{array} \right)$$

- Différentielle de f en p :

$$Df(p).(n_x, n_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(p).n_y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(p).n_y \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(p).n_x + \frac{\partial f_3}{\partial y}(p).n_y \end{pmatrix}$$

- Norme de la différentielle au carré :

$$S(p, \vec{n}) = \|Df(p).(n_x, n_y)\|^2 = En_x^2 + 2Fn_xn_y + Gn_y^2$$

$$E = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \quad F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} \quad G = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2$$

$$S(p, \vec{n}) = E n_x^2 + 2F n_x n_y + G n_y^2$$

Si $\vec{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, maximum de $S(p, \vec{n})$ pour :

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2F}{E - G} \right)$$

Maximum correspondant

$\lambda(x, y) =_{not} S(p, (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)))$:

$$\lambda(x, y) = \frac{E + G + \sqrt{(E - G)^2 + 4F^2}}{2}$$

λ égal au carré de la norme du gradient dans le cas mono-dimensionnel.

- ▶ Différentielle de $S(p, \vec{n})$:

$$D_S(p) \cdot \vec{n} = E_x(p)n_x^3 + (2F_x(p) + E_y(p))n_x^2n_y \\ + (G_x(p) + 2F_y(p))n_xn_y^2 + G_y(p)n_y^3$$

E_x, E_y, F_x, F_y et G_x, G_y : dérivées partielles de E, F et G par rapport à x et y .

- ▶ $D_S(p) \cdot \vec{n} \approx$ Laplacien

Références :

Zenzo 86, Cumani 89, 91

1. Calculer le gradient en chaque point
2. Créer l'image de la norme du gradient
3. Extraire les maxima locaux dans la direction du gradient.
4. Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

Seuillage à effet hystérésis : Ne conserver que :

1. Les points dont la norme du gradient est supérieure à un seuil haut (sh)
2. Les points dont la norme est supérieure à un seuil bas (sb avec $sb < sh$) et appartenant à un contour possédant un point de norme supérieure à sh .

- ▶ Calculer $D_2f(p) \cdot \vec{n}$ pour tout point p de l'image ($\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$)
- ▶ Rechercher les passages par zéro de $D_2f(p) \cdot \vec{n}$ dans la direction \vec{n} .
- ▶ Créer l'image des passages par zéro et de la norme du gradient.
- ▶ Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

- ▶ Calculer le Laplacien.
- ▶ Rechercher les passages par zéro.
- ▶ Créer l'image des passages par zéro et de la norme du gradient.
- ▶ Effectuer un seuillage à effet hystérésis de l'image des maxima locaux.

- ▶ Permet de passer d'une représentation spatiale à une représentation fréquentielle.
- ▶ Pour toute fonction intégrable :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

- ▶ Transformée inverse

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv$$

	Fonction	Transformée de fourrier
Linéarité	$af(x, y) + bg(x, y)$	$aF(u, v) + bG(u, v)$
Contraction	$f(ax, by)$	$\frac{1}{ a b } F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$
Translation	$f(x - x_0, y - y_0)$	$e^{-2j\pi(ux_0 + vy_0)} F(u, v)$
Convolution	$f * g(x, y)$	$F(u, v)G(u, v)$
Séparabilité	$f(x)g(y)$	$F(u).F(v)$
Rotation	θ	$-\theta$

- ▶ Les basses fréquences proche de l'origine codent les zones plates de l'images,
- ▶ les hautes fréquences codent les changements (textures/contours),
- ▶ Le changement de représentation permet de transformer des propriétés ou transformations globales en propriétés (ou changements) locaux.

Transformée de Fourier

