Mathématiques pour l'informatique

Éléments de théorie des graphes

Luc Brun

Cours basé sur le livre Graph theory de Harary

ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Plan

- Un des premier problèmes de graphes, posé et résolu par Euler (1707-1782) en 1736.
- Peut on, partant d'un point quelconque (rive ou ile) parcourir les 7 ponts une fois et une seule et revenir à son point de départ.

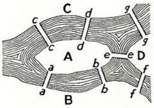
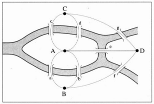
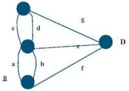


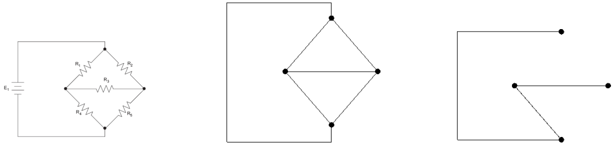
Figure 98. *Geographic Map: The Königsberg Bridges.*





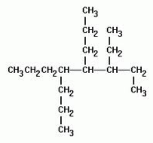
- Euler a été le premier à abstraire ce problème en termes de points abstraits (les sommets) reliés par des lignes (les arêtes).
- Il a montré que la proposition est vraie pour un graphe quelconque si et seulement si chaque sommet est incident à un nombre pair d'arêtes.

- Kirchhoff a introduit en 1847 une analyse des circuits électriques par l'étude de leurs graphes sous jascent.
- Il a notamment montré *en raisonnant sur le graphe* que pour retrouver l'intensité électrique dans chaque branche du circuit, il n'était pas utile de considérer séparément chaque cycle mais que l'on pouvait utiliser un arbre recouvrant.



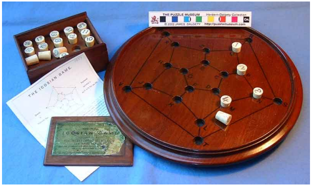
- Cette méthode est maintenant un standard.

- En 1857 Cayley c'est intéressé à l'énumération de tous les alkanes de la forme C_nH_{2n+2}.



- Il a formulé le problème en termes de graphes : Trouver tous les arbres de p sommets dont les sommets sont de degré 1 ou 4.
- Jordan en 1882 a redécouvert les arbres qu'il a défini comme des objets purements mathématiques.

- William Hamilton (1730-1803) à vendu pour 25 guinnées à un fabriquant de jeu, un jeu de plateau basé sur dodécahedre de 20 sommets, chaque sommet représentant une ville.
- Le joueur doit trouver un chemin (autour du monde) lui permettant de passer par chaque ville exactement une fois.



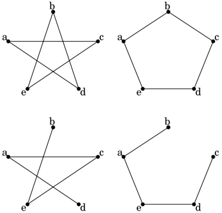
- Le jeux ne c'est quasiment pas vendu...

- Les graphes sont à la fois une structure de donnée informatique et un outil mathématique abstrait avec de nombreuses applications en :
- chimie (chemoinformatique) et biochimie (génomique),
- génie électrique et théorie des codes,
- réseaux informatiques, urbains, sociaux,...
  - Internet,
  - Google,
  - Facebook,...
- recherche opérationelle (transport)
- Définir l'apport de la théorie des graphes à la société actuelle à approximativement autant de sens que celle de tenter de définir celle des mathématiques tout entières.

- Un graphe $G = (V, E)$ est défini par un ensemble V de **sommets** (vertex/node) et un ensemble E de paires non ordonnées de sommets distincts.
- Chaque paire $e = \{u, v\}$ de sommets est une **arête** (edge) de G.
- On écrira $e = uv$ et dira que u et v sont **adjacents**.
- On dira que l'arête e et le sommet u sont **incidents** (idem pour e et v).
- Si deux arêtes sont incidentes à un même sommet on dira qu'elles sont adjacentes.
- Un graphe avec p sommets et q arêtes sera nommé un (p, q) graphe.

- Un **multigraphe** est un graphe dans lequel deux sommets peuvent être joints par plusieurs arêtes.
- Un **pseudo graphe** est un multigraphe comportant également des boucles (i.e. des arêtes connectant un sommet à lui même).
- Un graphe dirigé (ou **digraphe**) est un ensemble de sommets V muni d'un ensemble de paires *ordonnées* de sommets distincts définissant ces arêtes.
- Les arêtes d'un digraphe sont communément appellées des **arcs**.
- Un graphe orienté $D = (V, E)$ est un digraphe tel que $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$.
- Un graphe est labelisé lorsque chacun de ces sommets est attaché à une valeur distincte.

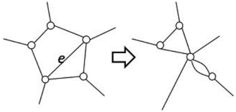
- Deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont dits **isomorphes** ($G_1 \cong G_2$) lorsqu'il existe une bijection f de V_1 dans V_2 telle que $uv \in E_1$ ssi $f(u)f(v) \in E_2$.



- Un invariant d'un graphe est une quantité qui a la même valeur pour deux graphes isomorphes (nombre de sommets, d'arêtes, degré des sommets. . .).
- Question ouverte : Peut on trouver un ensemble d'invariants qui caractérise un graphe à un isomorphisme prêt ?

- Un **sous graphe** de $G = (V, E)$ est un graphe dont les sommets et arêtes sont respectivements inclues dans V et E. Si G_1 est un sous graphe de G, G est un **supergraphe** de G_1.
- Un sous graphe recouvrant de G est un sous graphe de G contenant tous ses sommets.
- Pour tout ensemble $S \subset V$, le **sous graphe induit** $< S >$ de G est le plus grand sous graphe de G restreint aux sommets S. Donc une arête appartient à $< S >$ ssi elle appartient à G.

- La suppression d'un sommet d'un graphe $G = (V, E)$ $G - v$ est défini par le sous graphe de G définit sur $V - \{v\}$ sommets et possédant toutes les arêtes E à l'exception de celles incidentes à v.
- La suppression d'une arête $G - e$ est définie par le couple $(V, E - \{e\})$
- La contraction d'une arête $e = uv$, $G' = G/e$ est définie par un pseudo graphe $G' = (V', E')$ avec $V' = V - \{u, v\} \cup \{x\}, x \notin V$ et un ensemble d'arêtes possédant toutes les arêtes $e' = u'v', u' \neq u, v' \neq v$ de E et où toutes les arêtes uv' et $u'v$ ont été substituées par xv' et $u'x$.



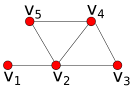
- L'addition de l'arête e est définie comme le plus petit super graphe de G contenant e.

Chemins

- Un **chemin**(walk) est une suite de sommets 2 à 2 adjacents.

$$P = v_1 \ldots, v_n, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} v_i v_{i+1} \in E$$

  Le chemin est fermé si $v_0 = v_n$ et ouvert sinon. $v_1 v_2 v_4 v_2 v_3$ est un chemin
- Une **chemin simple**(trail) est un chemin ne passant pas deux fois par la même arête. $v_1 v_2 v_4 v_5 v_2 v_3$ est un chemin simple
- Un **chemin élémentaire** (path) est un chemin ne passant pas deux fois par un même sommet (et donc deux fois par la même arête). $v_1 v_2 v_3$ est un chemin élémentaire.
- Un chemin élémentaire fermé, avec $n \geq 3$ est appelé un **cycle**. $v_2 v_3 v_4 v_2$ est un cycle.



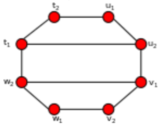
- Un chemin et un cycle de longueur n sont respectivement notés P_n et C_n
- Un graphe est **connexe** si toute paire de sommet peut être reliée par un chemin élementaire.
- Un sous graphe connexe maximal est appellé une **composante connexe**
- Le **graphe complet** K_p est le graphe de p sommets tous adjacents entre eux.
- La longueur d'un chemin est définie par son nombre d'arêtes
- La **distance** $d(u, v)$ entre deux sommets u et v est définie comme le plus court chemin joignant u et v si ils sont connectés ($d(u, v) = \infty$ sinon).
- La distance ainsi définie est une métrique : $d(u, v) \geq 0$ avec $d(u, v) = 0$ ssi $u = v$, $d(u, v) = d(v, u)$ et $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$
- Le carré de G, G^2 est défini sur le même ensemble de sommets que G. Ses arêtes sont définies par $E^2 = \{uv \mid d(u, v) \leq 2\}$. On défini de même $G^3, G^4 \ldots$.

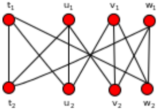
- Le degré d'un sommet v_i, noté d_i ou $deg(v_i)$ correspond au nombre d'arêtes incidentes à v_i.
- Chaque arête étant incidente à deux sommets on a (Euler) :

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

- Le degré minimum d'un graphe G est noté $\delta(G)$ et son degré maximum $\Delta(G)$.
- Si $\delta(G) = \Delta(G) = r$, on dit que le graphe est régulier de degré r.

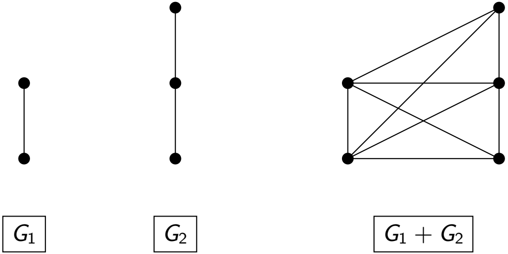
- Un **graphe biparti** est un graphe dont l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que toute arête E de G connecte V_1 à V_2.
- Si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 et vice versa on parle de **graphe biparti complet**. Si $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$, un tel graphe est appelé $K_{m,n}$. Clairement $K_{m,n}$ a mn arêtes.



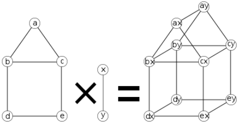


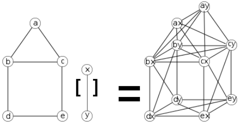
- Theorême : Un graphe est biparti ssi tous ses cycles sont pairs.

- Soient G_1 et G_2 deux graphes avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- L'union de G_1 et G_2, $G_1 \cup G_2$ est le graphe défini sur $V_1 \cup V_2$ avec l'ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2$.
- La jointure de G_1 et G_2, $G_1 + G_2$ est le graphe $G_1 \cup G_2$ auquel on ajoute l'ensemble des arêtes reliant V_1 à V_2.

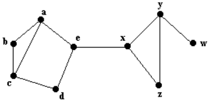


- Le graphe produit $G_1 \times G_2$ a pour ensemble de sommets $V_1 \times V_2$. On dira que ($u = (u_1, u_2)$ est adjacent à $v = (v_1, v_2)$ dans $G_1 \times G_2$ ssi : $u_1 = v_1$ et $u_2 v_2 \in E_2$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1 v_1 \in E_1$.
- La composition de G_1 et G_2, $G_1[G_2]$ a également $V_1 \times V_2$ comme ensemble de sommets , mais u est adjacent à v ssi $u_1 v_1 \in E_1$ ou $u_1 = v_1$ et $u_2 v_2 \in E_2$. Bien sur $G_1[G_2] \neq G_2[G_1]$.





- Un **point d'articulation**(cutpoint) est un sommet dont la suppression modifie le nombre de composantes connexes du graphe.
- Un **Pont** (bridge) est une arête dont la suppression modifie le nombre de composantes connexes du graphe.
- Un graphe **non séparable** est connexe et n'a pas de point d'articulation.
- Un block est un sous graphe non spérable de taille maximale. Si G est non séparable on dit également qu'il est un block.



Cutpoints: e, x and y

Caractérisation des points d'articulation

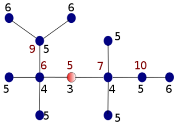
- Théorème : Soit v un sommet d'un graphe connexe G. Les propositions suivantes sont équivalentes :
  1. v est un point d'articulation de G,
  2. Il existe deux points u et w distincts de v tels que tout chemin de u à w passe par v.
  3. Il existe une partition de l'ensemble de sommets $V - \{v\}$ en deux sous ensembles U et W tel que pour tout $u \in U$ et $w \in W$, v appartient à tout chemin de u à w.

- Théorême : Soit e une arête d'un graphe connexe G. Les propositions suivantes sont équivalentes :
    1. e est un pont de G,
    2. e appartient à aucun cycle de G,
    3. Il existe deux sommets u et v tels que e appartient à tout chemin joignant u et v.
    4. Il existe une partition de V en deux sous ensembles U et W tel que pour tout $u \in U$ et $w \in W$, e appartient à tout chemin de u à w.

- Un **graphe acyclique** est un graphe ne possèdant pas de cycle,
- Un **arbre** est un graphe acyclique connexe,
- Un graphe acyclique non connexe est une **forêt**. Donc toute composante connexe d'une forêt est un arbre.

- Les propositions suivantes sont équivalentes pour un graphe G :
  1. G est un arbre,
  2. Tout couple de sommets de G est lié par un chemin élémentaire unique,
  3. G est connexe et $|V| = |E| + 1$,
  4. G est acyclique et $|V| = |E| + 1$,
  5. G est acyclique et si deux sommets non adjacents de G sont reliés par une arête e, alors $G + e$ a exactement 1 cycle,
  6. G est connexe, n'est pas $K_p, p \geq 3$ et si deux sommets non adjacents de G sont reliés par une arête e, alors $G + e$ a exactement 1 cycle,
  7. G n'est pas $K_3 \cup K_1$ ni $K_3 \cup K_2$, $|V| = |E| + 1$ et si deux sommets non adjacents de G sont reliés par une arête e, alors $G + e$ a exactement 1 cycle,

- L'**excentricité** $e(v)$ d'un sommet v dans un graphe connecté est définie par $max_{u \in V} d(u, v)$.
- Le **rayon** $r(G)$ d'un graphe est son excentricité minimale. Son excentricité maximale correspond au **diamètre**.
- Un sommet v est **central** si $e(v) = r(v)$.
- Une **branche** T' d'un sommet u d'un arbre T est un sous arbre maximal de T contenant u tel que le degré de u dans T' est égal à 1. Le nombre de branches d'un sommet u est donc $deg(u)$. Le poids d'une branche est son nombre d'arêtes.
- Le **poids** d'un sommet est le poids maximum de ses branches.
- Un sommet est appellé un **centroïde** de l'arbre T si son poids est minimum.



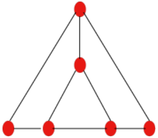
- Tout arbre a un centre composé d'un ou deux sommets adjacents,
- Tout arbre a un centroïde composé d'un ou deux sommets adjacents.

- Soit un graphe $G = (V, E)$. On considère les espaces vetoriels sur V et E sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.
- Une 0 chaîne est une combinaison formelle de sommets : $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i v_i$.
- Une 1 chaîne est une combinaison linéraire d'arêtes : $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i$.
- L'opérateur de bord ∂ envoie les 1 chaînes sur les 0 chaînes :
  1. ∂ est linéaire,
  2. $\partial uv = u + v$
- L'opérateur de cobord δ envoie les 0 chaînes sur les 1 chaînes :
  1. δ est linéaire,
  2. $\delta v = \sum_{e_i \in E} \epsilon_i e_i$, où $\epsilon_i = 1$ si e_i est incidente à v.

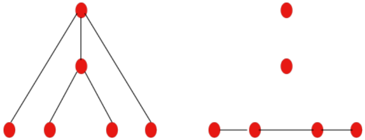
- Une 1 chaîne de bord 0 est un vecteur de cycle et peut se voir comme un ensemble arête-disjoint de cycles.
- L'ensemble des vecteurs de cycles forme un espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ appellé l'**espace des cycles**.
- Une **base de cycles** est une base de cet espace vectoriel.
- La taille d'une base de cycle est définie comme la somme des tailles de chacuns de ces cycles.
- L'union des bases de taille minimale consitue **l'ensemble des cycles élémentaires** d'un graphe.

- Une **coupe** d'un graphe connexe est un ensemble d'arêtes dont la suppression deconnecte le graphe.
- Un **cocycle** est une coupe minimale
- Un **cobord** de G est un cobord d'une 0 chaîne de G.
- Le cobord d'un ensemble $U \subset V$ est l'ensemble des arêtes reliant un sommet de U à un sommet de $V - U$. Tout cobord est donc une coupe et un cocycle est un cobord non vide de taille minimale.
- L'ensemble des cobords de G est appelé l'espace des cocyles et forme un espace vectoriel.
- Une base de cycle peut se construire en considérant un arbre recouvrant de G et l'ensemble des cycles formés en ajoutant une arête de $E - E_T$ à T.
- Le **co arbre** T^* d'un arbre recouvrant T de G est un arbre recouvrant formé de l'ensemble des arêtes de G n'appartenant pas à T
- Une base de cocycle peut être construire en ajoutant chaque arête de T à T^*. Chaque sous graphe ainsi construit contient exactement un cocycle.

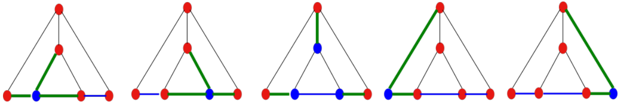
- Graphe G



- arbres recouvrant T et T^*



- Base de Cocylcles



: Élément de T^*

: cocycle contenu dans un $E_{T^*} \cup \{e\}, e \in E_T$.

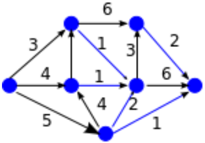
- La **connexité de G au sens des sommets** $\kappa(G)$ est le nombre minimal de sommets que l'on peut supprimer avant de deconnecter le graphe ou d'obtenir un graphe trivial.
- La **connexité de G au sens des arêtes**, $\lambda(G)$ est le nombre minimal d'arêtes que l'on peut supprimer de G sans le deconnecter ou obtenir un graphe trivial.
- Question : $\kappa(K_p) = ?, \lambda(K_p) = ?$.
- On a [Whitney]

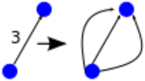
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

  $\delta(G)$: degré minimimum de G.

- Deux chemins de u à v sont dits **disjoints** (ou sommet-disjoint) si ils ne partagent pas d'autres sommets que u et v. Ils sont dits **arête disjoints** si ils ne partagent pas d'arête.
- Un sous graphe S **sépare** u et v, si u et v sont dans différentes composantes connexes de $G - S$.
- Théorême 1 : Le nombre maximum de chemins arête-disjoints entre s et t et le nombre minimal d'arêtes les séparant.
- Théorême 2 : Pour tout couple de sommets, le nombre maximum de coupes disjointes séparant ces deux sommets est égal au nombre minimum d'arêtes qui les joignent (i.e. leur distance).

- Dans tout réseau où il existe un chemin de s à t, le flot maximum de s à t est égal à la capacité de la coupe minimum.



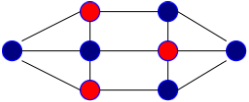


- Soit S un ensemble et $F = \{S_1, \ldots, S_n\}$ une famille de sous ensembles de S. Le graphe d'intersection de F, $\Omega(F)$ a pour ensemble de sommets $\{S_1, \ldots, S_n\}$, deux sommets S_i et $S_j, i \neq j$ étant adjacents ssi $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.
- Un graphe G est un graphe d'intersection si il existe F tel que $G \cong \Omega(F)$.
- Proposition : Tout graphe est un graphe d'intersection (considerez $S_i = \{v_i\} \cup \{v_i v_j \in E\}$).
- Soit $G = (V, E)$, considérons chaque arête $uv \in E$ comme un ensemble $\{u, v\}$. Le graphe de lignes de G, $L(G)$ est égal à $\Omega(E)$.
  - Les sommets de $L(G)$ sont les arêtes de G,
  - Deux arêtes sont adjacentes dans $L(G)$ si elles sont incidentes à un sommet commun dans G.

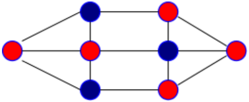
- Un point d'articulation de $L(G)$ est un pont de G et inversement.
- Un graphe G vérifie $G = L(G)$ ssi G est un cycle.
- Soient G et G' deux graphes connexes dont les graphes de lignes sont isomorphes. Alors $G \cong G'$ a moins que l'un soit égal à K_3 et l'autre à $K_{1,3}$.

- Un sommet et une arête se **couvrent** si ils sont incidents,
- Un ensemble de sommet couvrant l'ensembre des arêtes d'un graphe est appelé une **couverture de sommets** (ou transversale)
- Un ensemble d'arêtes couvrant tous les sommets est appelé une **couverture d'arête**
- Le plus petit nombre de sommets de toute couverture de sommet est appelé le **nombre de couverture de sommet** $\alpha_0(G)$ ou α_0
- De même, Le plus petit nombre d'arête de toute couverture d'arête est appelé le **nombre de couverture d'arête**, $\alpha_1(G)$ ou α_1.
- Par exemple $\alpha_0(K_p) = p - 1, \alpha_1(K_p) = [(p+1)/2]$.
- Une couverture est dite minimum si elle comporte α_0 (resp. α_1) sommets (resp. arêtes). Notez qu'une couverture peut être minimale sans être minimum.

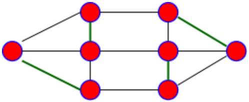
- Un ensemble de sommets S est dit **indépendant** si aucune couple de sommets de S n'est adjacent. Le plus grand nombre de sommets indépendant est noté $\beta_0(G)$ ou β_0.
- De même, un ensemble d'arêtes est dit indépendant si aucun couple d'arêtes d'un tel ensemble n'est incident à un même sommet (adjacent dans $L(G)$). Le plus grand nombre d'arêtes indépendante est noté $\beta_1(G)$ ou β_1.
- Prop : Si S est une couverture de sommets $V - S$ est un ensemble indépendant.
- Théorême [Gallai 1959] : $\alpha_0 + \beta_0 = |V| = \alpha_1 + \beta_1$.



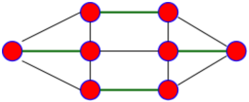
Ensemble maximum de sommets indépendants
$\beta_0 = 3$



Couverture de sommets
$\alpha_0 = 5$

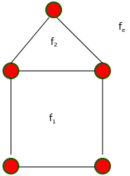


Ensemble maximum d'arêtes indépendantes
$\beta_1 = 4$



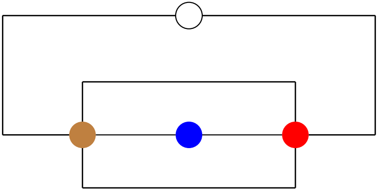
Couverture d'arêtes
$\alpha_1 = 4$

- Un graphe est dit **plongé** sur une surface S lorsqu'il peut être tracé sur S sans que deux arêtes se croisent.
- Un graphe est dit **planaire** si il peut être plongé dans le plan.
- Un graphe planaire induit la définition de régions du plan délimitées par des arêtes. Ces régions sont appellées des faces. L'ensemble des faces est noté F.
- Toutes les faces d'un graphe correspondent à une région finie sauf une appelé la **face extérieure** ou infinie.

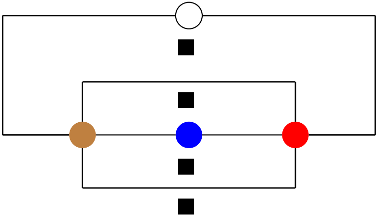


- Le nombre de sommets, arêtes et faces d'un graphe planaire sont reliés par la relation d'Euler :
$$|V| - |E| + |F| = 2$$
- Cette formule se généralise à d'autres types de surface :
$$|V| - |E| + |F| = \chi$$
où χ est appelé la caractéristique d'Euler (ou Euler-Poincaré) de la surface.
- Théorême[Kuratowski] : Un graphe planaire est un graphe qui ne contient pas de sous graphes homéomorphes (contractibles) en K_5 ou $K_{3,3}$.

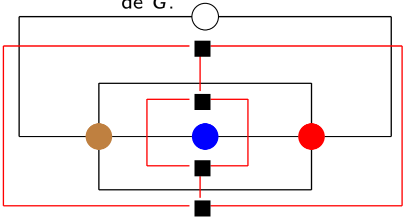
- Le **dual géométrique** d'un graphe G, noté $\overline{G}$ est construit :



- Le **dual géométrique** d'un graphe G, noté $\overline{G}$ est construit :
  - En créant un sommet de $\overline{G}$ pour chaque face de G,

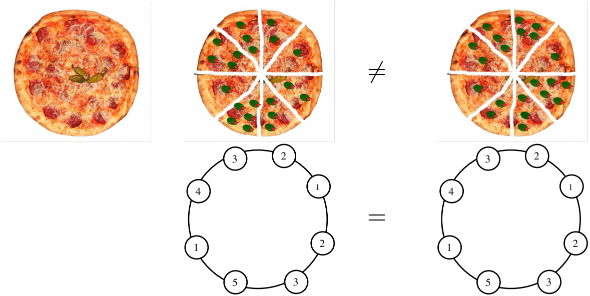


- Le **dual géométrique** d'un graphe G, noté $\overline{G}$ est construit :
  - En créant un sommet de $\overline{G}$ pour chaque face de G,
  - Une arête entre deux sommets de $\overline{G}$ pour chaque arêete séparant deux faces de G.



- L'opérateur dual est une involution :$\overline{\overline{G}} = G$
- On a une correspondance $1-1$ entre les arêtes de G et $\overline{G}$
- Une boucle de G est un pont de $\overline{G}$ et vice versa.
- Toute contraction dans G implique une suppression dans $\overline{G}$
- Toute suppression dans G implique une contraction dans $\overline{G}$

- Utilise on toutes les propriétés du plan ?



- Définitions de base
  - Ensemble D
  - Permutation : application bijective de D dans D

- Définitions de base
  - Ensemble D
  - Permutation : application bijective de D dans D
    - Orbites de b dans D suivant π

$$< \pi > (b) = \{b, \pi(b), \pi^2(b), \ldots, \pi^n(b)\}$$

avec $n \leq |D|$.

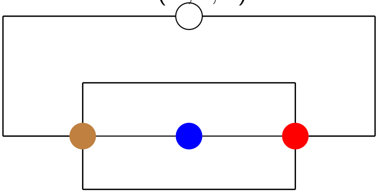
- Définitions de base
  - Ensemble D
  - Permutation : application bijective de D dans D
    - Orbites de b dans D suivant π

      $$<\pi>(b) = \{b, \pi(b), \pi^2(b), \dots, \pi^n(b)\}$$

      avec $n \leq |D|$.
    - Décomposition en cycles : $\pi^*(b)$ restriction de π à $<\pi>(b)$.

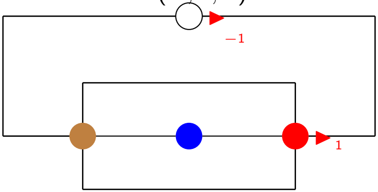
      $$\pi = \pi^*(b_1) \dots, \pi^*(b_p)$$

- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$



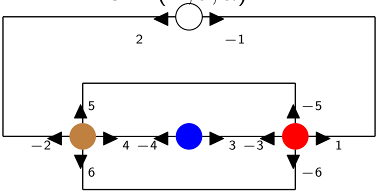
- Chaque arête est découpée en deux demis arêtes appelées brins.

- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$



- Les deux brins d'une même arête sont liés par une involution α :
  $\alpha(1) = -1, \alpha(-1) = 1$

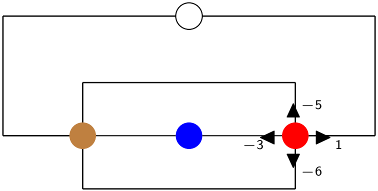
- $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$



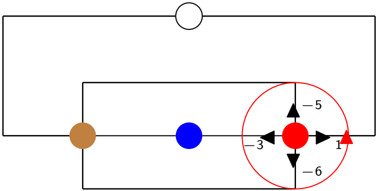
$$\mathcal{D} = \{-6, \dots, -1, 1, \dots, 6\}$$
$$\forall b \in \mathcal{D}\ \alpha(b) = -b$$

$$\alpha = (1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4)(5, -5)(6, -6)$$

Les sommets

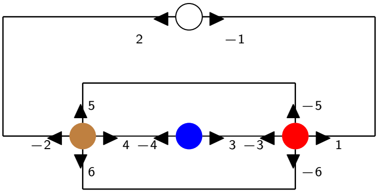


- Les sommets sont codés par les cycles de σ.



- $\sigma^*(b)$ correspond à la suite de brins rencontrés en tournant dans le sens positif autour du sommet contenant b.

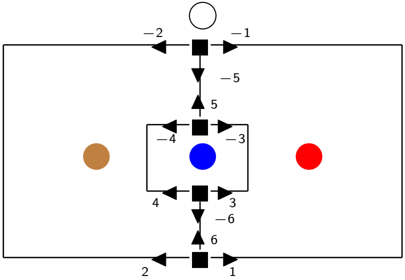
$$\sigma^*(1) = (1, -5, -3, -6)$$



$$\sigma = (1, -5, -3, -6)(6, 4, 5, -2)(2, -1)(3, -4)$$

- Si $G = (\mathcal{D}, \sigma, \alpha)$ alors $\overline{G} = (\mathcal{D}, \varphi = \sigma \circ \alpha, \alpha)$.
- Les cycles de φ codent les faces de la carte (et donc les sommets de la carte duale).

$$\varphi = (-2, -1, -5)(-4, 5, -3)(4, 3, -6)(2, 6, 1)$$



- Graph theory, Hararyn Addison-Wesley publishing,
- Algèbre moderne et théorie des graphes, B. Roy, eds. Dunod,
- Graph theory, W.T. Tutte, Encyclopedia of mathematics and its applications.